Mathématiques Discrétes

Hatem MASRI

Septembre 2003

Contents

Introduction

Souvent lorsque je pose la question suivante à mes étudiants, : "est ce que les mathématiques rendent votre vie plus facile ", la majorité ou presque répondent par non. Certainement parce qu'ils voient toujours dans les mathématiques le coté complexité des calcul et qu'ils ont pas peut être pu admiré ce qui est essentielle : Le raisonnement mathématique.

Le raisonnement mathématique qui a nos jours représente un complément essentiel au raisonnement dit verbal et joue un rôle fondamental dans le développement de notre vie et dans le progrès réaliser par l'humanité. Des domaines tel que, la physique, les sciences sociales, la gestion et l'informatique.

L'intelligence artificielle est une des importantes application des mathématiques dans le domaine de l'informatique. Mais en informatique on a plus besoin d'une branche particulière des mathématiques dites : Mathématique discrètes. La compréhension de ce genre de mathématique va rendre plus facile l'apprentissage de l'informatique.

L'objet de ce cours est de donné un texte introductive au mathématiques discrètes car vu le développement énorme ces dernières années de cette discipline, aucun cours, ni livre, ne peut prétendre couvrir tout le sujet avec pertinence et rigueur.

Chapter 1

Théorie des ensembles et calcul propositionnel

1.1 Introduction

1.1.1 Ensemble et élément

Un *ensemble* est une collection d'objets, de personnes, ...etc, qui ont une propriété communes.

Exemple 1 *L'ensemble "la classe de 1IAGn" ;*
$\aleph$ *l'ensemble des entiers positifs ;*
$\Re$ *l'ensemble des réels*

Un ensemble est une collection d'éléments. Un élément est dit aussi membre de l'ensemble.

Exemple 2 *Les élements de l'ensemble "1IAGn" sont les étudiants membre de la classe 1IAGn.*

Si on désigne par S l'ensemble des lettres $\{a, b, c\}$, alors on note $a \in S$ pour signifier que l'élément a appartient à S. Par contre l'élément d n'appartient pas à S et on note ceci par $d \notin S$.

Remarque 3 *Dans un ensemble il faut que tous les éléments soient distincts. Ainsi si dans notre classe on a deux personne qui ont le même prénom* *alors on doit les différencier par exemple on ajoutant un index à chacun de ces éléments. Par exemple :*

$$\textit{1IAGn} = \{..., \textit{mohamed1, mohamed2, mohamed3},...\}$$

Un ensemble peut être ordonné ou non ordonné. Il est dit *ordonné* s'il existe une relation d'ordre (chapitre 3) sur cette ensemble et les élements sont classés selon cet ordre.

Exemple 4 *On peut ordonné l'ensemble 1IAGn selon un ordre croissant de l'âge des étudiants.*

On peut caractériser un ensemble par une liste exhaustif de ces élements comme on peut aussi le représenter par une propriété commune à tout ces éléments.

Exemple 5

$$\begin{aligned} S &= \{2, 4, 6, 8, 10\} \\ &= \{x / x \text{ est un nombre pair inférieur à 10 supérieur à 2}\} \\ &= \{x / x = y + z \text{ avec } y \in \{1, 3, 5\} \text{ et } z \in \{1, 3, 5\}\} \end{aligned}$$

Deux ensembles A et B sont *égaux* si et seulement si, ils contiennent les même élements. On note $A = B$. Par ailleurs, si un éléments est présent dans un ensemble et pas dans l'autre alors A et B ne sont pas égaux et on note $A \neq B$.

Exemple 6 *Vérifier que ces ensembles sont deux a deux égaux :*

$$\begin{aligned} \text{i) } A &= \left\{x / x^2 - 2x + 1 = 0\right\} \text{ et } B = \{1\} \\ \text{ii) } A &= \left\{x / Log\left(x^2 + e\right) = 1\right\} \text{ et } B = \{0\} \end{aligned}$$

1.1.2 Univers et ensemble vide

Dans n'importe qu'elle application de la théorie des ensembles, les éléments de tout les ensembles appartiennent à un ensemble plus large dit *univers*. On le note généralement U.

Exemple 7 *Si les ensemble qu'on manipule sont relatifs à des groupes d'étudiants de l'ISG alors on peut choisir comme univers l'ensemble de tous les étudiants de l'ISG. Bien sur, on peut choisir un ensemble plus grand, comme l'ensemble de tout les étudiants tunisiens ...*

Si l'univers est le plus grand ensemble qui contient tout les éléments candidat a être membre d'un ensemble, l'*ensemble vide* est le plus petit ensemble qui contient aucun éléments. On le note par $\{\}$ ou par $\emptyset$.

1.1.3 Sous ensembles

Si tous les élements d'un ensemble A sont aussi éléments de l'ensemble B, alors A est dit *sous ensemble* de l'ensemble B. On note $A \subset B$.

Exemple 8 *L'ensemble $S = \{$les étudiante du 1IAGn$\}$ est un sous ensemble de 1IAGn ($S \subset$1IAGn).*

L'ensemble $\emptyset$ est un sous ensemble de tout ensemble de l'univers.

Remarque 9 *L'ensemble $\{\emptyset\}$ n'est pas un sous ensemble de l'ensemble $\{\{\emptyset\}\}$, mais c'est un élément de l'ensemble $\{\{\emptyset\}\}$.*

Exercise 10 *Déterminer la relation entre $A = \{\{a,b,c\},c,d\}$ et les ensembles suivante*

$$B = \{c,d\}$$
$$C = \{c,b,a\}$$
$$D = \{d\}$$
$$E = \{a,b\}$$

Solution : $B \subset A$, $C \in A$, $D \subset A$ et il y a pas de relation entre A et E.

Exercise 11 *Déterminer la relation entre $A = \{\{a\},\{b,c\},\{\{d,e,f\},g\}\}$ et les ensembles suivant*

$$B = \{\{a\},\{b,c\}\}$$
$$C = \{d,e,f\}$$
$$D = \{c,b\}$$
$$E = \{\{b,c\},\{\{d,e,f\},g\}\}$$

Solution : $B \subset A$, $D \in A$ et $E \subset A$ et il y a pas de relation entre A et C

Proposition 12 *1. Pour tout ensemble A, $\emptyset \subset A \subset U$;*

2. Pour tout ensemble A, $A \subset A$;

3. Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$;

4. $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

1.2 Opérations sur les ensembles

L'*union* de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble de tous les éléments qui appartient à A ou B :

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

L'*intersection* de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble de tous les éléments qui appartient à A et B :

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Exemple 13 $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
$\{a, b\} \cup \emptyset = \{a, b\}$
$\{a, b\} \cup \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a, b\}\}$
$\{a, b\} \cap \{b, c, d, a\} = \{a, b\}$
$\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
$\{a, b\} \cap \emptyset = \emptyset$

Remarque 14 *Si $A \cap B = \emptyset$ alors A et B sont dit disjoint.*

L'*ensemble complémentaire* de l'ensemble B par rapport à l'ensemble A, ou plus simplement, la différence entre A et B, notée $A \diagdown B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais n'appartiennent pas à B :

$$A \diagdown B = \{x / x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Exemple 15 $\{a, b, c\} \diagdown \{a\} = \{b, c\}$
$\{a, b, c\} \diagdown \{d, e\} = \{a, b, c\}$

Le *complément* d'un ensemble A (dans l'univers U), notée $\overline{A}$, est l'ensemble de tout les élément qui appartiennent a l'univers U mais pas à A :

$$\overline{A} = U \diagdown A = \{x / x \in U \text{ et } x \notin A\}$$

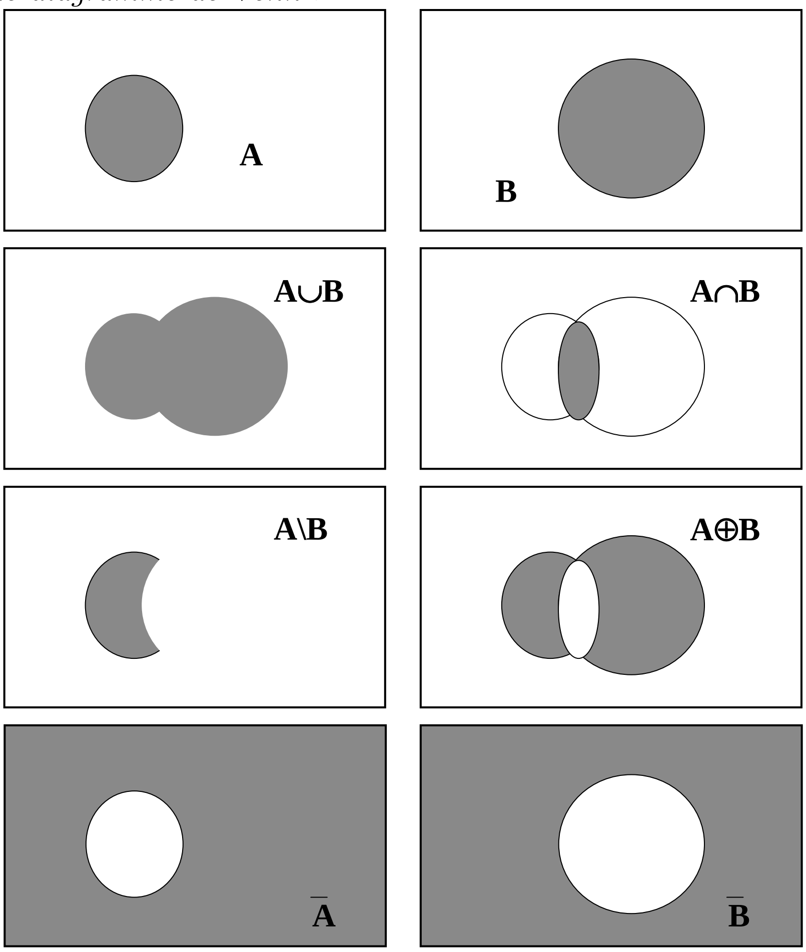
Exemple 16 *Si U =1IAGn et si $A = \{$les garcons de la classe de 1IAGn$\}$, alors $\overline{A} = \{$les filles de la classe de 1IAGn$\}$*

La *différence symétrique* de deux ensemble A et B, notée $A \oplus B$, est l'ensemble de tout les élements qui appartient à A ou à B mais pas ”A et B” :

$$A \oplus B = \{x / x \in A,\ x \in B \text{ et } x \notin A \cap B\}$$

Un *diagramme de Venn* (ou d'Euler) est une représentation graphique des ensembles dans le plan. L'univers U est représente par l'intérieur d'un rectangle et les autres ensembles par des disques dans le rectangle.

Exemple 17 *Dans ce qui suit, on illustre les opérations sur les ensembles par le diagramme de Venn :*



Exercise 18 *Vérifier à l'aide du diagramme de Venn que*

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A \diagdown B) \cup (B \diagdown A) \\ &= (A \cup B) \diagdown (A \cap B) \end{aligned}$$

L'*ensemble des partie* d'un ensemble A, notée $\Im(A)$, est la famille des sous ensembles de A y compris l'ensemble $\emptyset$.

Exemple 19 $\Im(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
$\Im(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Exercise 20 *Utiliser le diagramme de Venn pour vérifier les lois suivantes dite lois de l'algèbre des ensembles (Chapitre 6)*

- *Idempotense :* $A \cup A = A$ *et* $A \cap A = A$
- *Associativité :* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *et* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- *Commutativité :* $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$
- *Distributivité :* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *et* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- *Identité :* $A \cup \emptyset = A$, $A \cup U = U$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ *et* $A \cap U = A$
- *Involution :* $\overline{\overline{A}} = A$
- *Complémentarité :* $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$, $\overline{U} = \emptyset$ *et* $\overline{\emptyset} = U$
- *Lois de De Morgan :* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *et* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Solution : Essayons de vérifier de deux manières la première loi de De Morgan, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

1ère methode : *Démontrons que* $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ *et que* $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Si $x \in \overline{A \cup B}$ *alors* $x \notin A \cup B$.
Ici il faut faire attention car on sait que

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

mais on sait rien concernant $x \notin A \cup B$. *On peut vérifier par le diagramme de Venn que*

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B$$

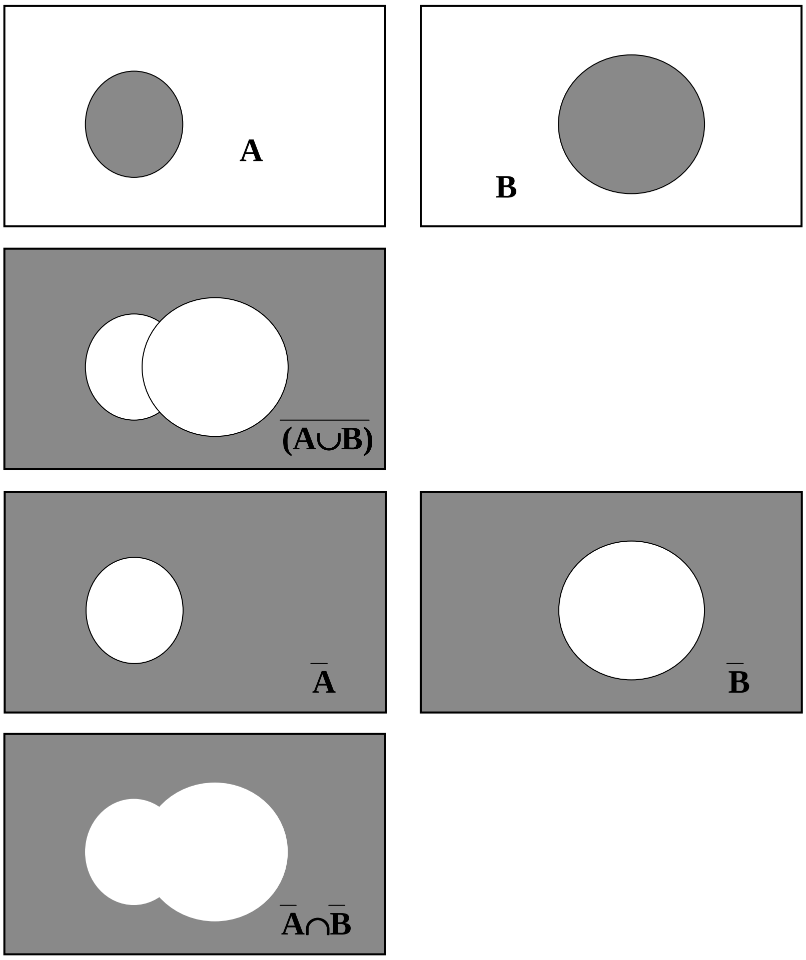
Ainsi, $x \notin A$ *et* $x \notin B$ *donc* $x \in \overline{A}$ *et* $x \in \overline{B}$, *ce qui conduit à* $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Notons aussi que

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B$$

Si $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ *alors* $x \in \overline{A}$ *et* $x \in \overline{B}$. *Donc* $x \notin A$ *et* $x \notin B$, *ce qui conduit à* $x \notin A \cup B$. *Ainsi* $x \in \overline{A \cup B}$.

2ème méthode : *Le diagramme de Venn :*



1.3 Ensembles finis et ensembles infinis

Le nombre d'éléments qui existe dans l'ensemble 1IAGn est égale au nombre d'étudiants dans cette classe. Ainsi on va qualifier cette ensemble, d'ensemble fini. La question est maintenant : c'est quoi un ensemble infinis ?

Tout d'abord essayons de construire un ensemble infini bien particulier. Pour tout ensemble A, le successeur de A, qu'on note A^+, est l'ensemble $A \cup \{A\}$. Alors si $A = \{a, b\}$ alors $A^+ = \{a, b, \{a, b\}\}$.

Dans ce qui suit on va essayer de construire une série de successeur de l'ensemble vide. Notons par $0 = \emptyset$, par $1 = 0^+ = \{\emptyset\}$ et ainsi de suite on note $n = (n-1)^+$:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{\emptyset\} \\ 2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Soit N un ensemble qui vérifie :

1. N contient l'ensemble 0
2. Si n est un élément de l'ensemble N alors n^+ appartient à N.
3. N ne contient aucun autre ensemble.

Vu la règle 2, on peut être convaincu que l'ensemble N est un ensemble infini.

Avant de caractériser les ensembles finis et les ensembles infinis, on va tout d'abord introduire la notion de correspondance par paire dite aussi correspondance une à une.

On dit que deux ensemble A et B ont une *correspondance une à une,* si pour chaque élément de A il existe un unique élément de B qui lui correspond et inversement, pour chaque élément de B il existe un unique élément de A qu'il lui correspond.

Exemple 21 *Vérifier qu'on peut trouver une correspondance une à une entre A et B :*

1. $A = \{a, b\}$ *et* $B = \{2, 9\}$
2. $A = \{\{a\}, \emptyset, 2\}$ *et* $B = \{1, 2, 4\}$

Un ensemble A est dit *fini* s'il existe une correspondance une à une entre les éléments de A et les éléments d'un ensemble n, avec $n \in N$. n représente la *cardinalité* de l'ensemble A, qu'on note $|A| = n$.

Exemple 22 *l'ensemble* $\{\emptyset, a, 2\}$ *est un ensemble fini de cardinalité égale à 3.*

Un ensemble A est dit *infini dénombrable* s'il existe une correspondance une à une entre A et l'ensemble N

Exemple 23 *Il est clair qu'il existe une correspondance une à une entre l'ensemble des entiers positifs* $\aleph$ *et* N*. Ainsi* $\aleph$ *est de cardinalité infini.*

Il existe des ensembles infinis mais non dénombrable. Par exemple essayons d'examiner l'ensemble des nombres réels qui sont entre 0 et 1. Cette ensemble est infini mais on peut pas lister tout ces éléments de manière a réaliser une correspondance une à une avec N. Pour prouver ceci, nous allons supposer qu'une liste des nombres réels entre 0 et 1 peut être établie de la manière suivante :

$$\begin{array}{llllll}
0, & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & ..... \\
0, & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & ..... \\
0, & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & ..... \\
 & & \vdots & & & \\
0, & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & ..... \\
... & ... & ... & .... & .... & .....
\end{array}$$

avec a_{ij} est le $j^{ième}$ décimale du $i^{ème}$ nombre de la liste.

Considérons le nombre suivant :

$$0, b_1 b_2 b_3 b_4 ....$$

avec $b_i = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } a_{ii} = 9 \\ 9 - a_{ii} \text{ sinon} \end{array} \right.$.

Ce nombre est entre 0 et 1 et ne contient aucune décimale égale à 0 (donc il ne peut pas être de la forme $0, 120000...$). Ce nombre en plus n'est pas dans la liste puisqu'il diffère de chaque nombre n de la liste dans sa décimale $a_{nn} \neq b_n$. Ce qui contredit l'hypothèse qu'on peut lister les éléments de cette ensemble. Donc cet ensemble est *infini non dénombrable*.

1.4 Induction mathématique

Supposons qu'on a une quantité infini de timbres à 300 cents millimes et de timbres à 500 cents millimes. On veut montrer qu'il est toujours possible de poster n'importe qu'elle lettre dont le prix est supérieur à 800 millimes en utilisant les timbres à 300 et 500 millimes (sachant que le prix pour poster une lettre est toujours multiple de 100 millimes).

A premier vu, quelqu'un peut nous suggérer de vérifier cette propriété pour des envoie de lettre qui coûte respectivement 900, 1000, ...etc. Cette manière de faire n'est pas pratique et demande énormément d'effort et de temps sans enfin de compte réaliser une vérification complète de cette propriété.

Nous savons que pour un envoie d'une lettre qui coûte 800 millimes on peut utiliser un timbre à 300 millimes et un timbre à 500 millimes. Essayons maintenant de montrer que si c'est possible d'envoyer une lettre qui coûte k cents millimes ($k \geq 8$) avec des timbres à 300 et à 500 millimes, alors il est toujours possible d'envoyer une lettre qui coûte $k+1$ cents millimes avec des timbres de 300 et 500 millimes. Examinons ces deux cas de figure

1. Si pour poster la lettre à k cents millimes on a utiliser au moins un timbre à 500 cents millimes alors il suffit de remplacer ce timbre par deux timbres à 300 millimes pour réaliser un envoie à $k+1$ cents millimes.
2. Sinon, si on a utiliser que des timbres de 300 millimes pour poster la lettre à k cents millimes, alors ceci nécessite au moins 3 timbres à 300 millimes vu que $k \geq 8$. Ainsi, pour poster la lettre à $k+1$ cents millimes il suffit de remplacer les 3 timbres à 300 millimes par 2 timbres à 500 millimes.

On peut conclure maintenant qu'il est toujours possible de poster une lettre qui coûte plus que 800 millimes avec des timbres de 300 et 500 millimes.

Le raisonnement qui nous a conduit à vérifier la propriété ci dessus est connu sous le nom du *principe d'induction mathématique* ou aussi le *principe du raisonnement par récurrence.*

Principe d'induction mathématique I : Soit P une proposition définie sur un sous ensemble infini des entiers positif $\aleph$. C'est à dire que $P(n)$ est vraie ou fausse pour chaque $n \geq n_0$. Supposons que P possède les deux propriétés suivantes :

1. $P(n_0)$ est vraie
2. Pour tout $k \geq n_0$, $P(k+1)$ est vraie si $P(k)$ est vraie.

Donc P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

On appelle l'étape 1. du principe d'induction mathématique, la base de l'induction, et l'étape 2. de ce même principe est dite l'étape d'induction.

Exemple 24 *Un roi demande à un groupe de n mathématiciens célébres de venir à son château pour tester leurs niveau. Lorsqu'ils sont rassemblé le roi leurs disait : "J'ai fait porter à chacun d'entre vous un petit chapeau. Les chapeaux sont de deux couleurs noirs et blancs et il y a au minimum un d'entre vous qui porte un chapeau blancs. Je vous ordonne de ne pas lever vos yeux pour voir la couleur de votre chapeau et aussi de ne pas parler avec vous collègues. Je vais retourner en salle chaque heures et j'aimerais que ceux parmi vous qui sont sur qu'ils portent un chapeau blanc qu'ils se manifestent à mon retour dans votre salle". Montrer qu'au plus tard après n heures, les mathématiciens qui portent un chapeau blanc vont se manifester au prêt du roi.*

Pour expliquer ce phénomène on va procéder par récurrence. La proposition, notée P, est : "$\forall\ n \geq 1$, les n mathématiciens qui portent un chapeau blancs vont se manifester au plus tard après n heures".

1. *Base d'induction : Pour $n = 1$, comme le roi ne ment pas et comme il y a au moins un mathématicien qui porte un chapeau blancs donc ce mathématicien va se manifester des la première heure.*
2. *Etape d'induction : Pour $k \geq 1$, supposons que $P(k)$ est vraie c'est à dire que pour k mathématiciens qui portent un chapeau blancs ils vont se manifester chez le roi au plus tard après k heures et vérifions $P(k+1)$.*
   Si $k+1$ mathématicien portent un chapeau blancs, alors chaque mathématicien qui porte un chapeau blancs va voir que k de ces collègues portent un chapeau blancs. Cependant, aucun de ces collègues ne s'est manifester chez le roi après k heures, ce qui veut dire qu'il y a plus que k chapeau blancs dans la salle. Ainsi le mathématicien va se rendre compte qu'il porte un chapeau blanc et il va se manifester avec ces collègues après $k+1$ heures.

Exercise 25 *Vérifier par induction mathématique que pour tout $n \in \aleph$:*

$$P_1(n) \quad : \qquad 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$P_2(n) \quad : \qquad 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exemple 26 *On va procéder par induction pour montrer la proposition P qui dits que toutes les voitures ont la même couleur.*

1. *Base d'induction : $P(1)$ est vraie car une seule voiture à la même couleur*
2. *Etape d'induction : Pour $k \geq 1$, supposons que $P(k)$ est vraie. Ce qui veut dire que tout ensemble de k voitures ont la même couleur. Montrons que $P(k+1)$ est vraie.*

   On note par $\{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}\}$ l'ensemble de $k+1$ voitures. D'après l'hypothèse d'induction les éléments du sous ensemble de k voitures $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ ont la même couleur de même les éléments du sous ensemble de k voitures $\{v_2, ..., v_k, v_{k+1}\}$ ont aussi la même couleur. Ainsi on a

   $$\textit{couleur}(v_1) = \textit{couleur}(v_2, ..., v_k) = \textit{couleur}(v_{k+1})$$

   On conclut que les $k+1$ voitures ont la même couleur.

Bien sur P est fausse et il y a une faute dans notre raisonnement et pas dans le principe d'induction mathématique. L'erreur réside dans l'étape d'induction et le raisonnement qu'on a fait ne s'applique que pour $k \geq 2$ et pas pour le cas où $k = 1$. Ainsi pour que notre raisonnement soit correct il faut vérifier dans la base d'induction que $P(2)$ est vrai, chose impossible à valider.

Il existe une autre forme du principe d'induction mathématique

Principe d'induction mathématique II : Soit P une proposition définie sur un sous ensemble infini des entiers positif $\aleph$. C'est à dire que $P(n)$ est vraie ou fausse pour chaque $n \geq n_0$. Supposons que P possède les deux propriétés suivantes :

1. $P(n_0)$ est vraie
2. $P(n)$ est vraie chaque fois que $P(k)$ est vraie pour tout $n_0 \leq k < n$.

Donc P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple 27 *Considérons un puzzle de n pièces. Un ensemble de pièces réunit est dit bloc. Pour former un bloc de deux pièces on a besoin de faire 1 mouvement (mettre la seconde pièce à coté de la première pièce). Montrer par induction que pour construire un puzzle de n pièces on a besoin de faire $n-1$ mouvements.*

1. *Base d'induction : Pour $n = 1$, c'est à dire pour former un puzzle à une seule pièce, on a besoin de faire aucun mouvement.*
2. *Etape d'induction : Supposons que pour former un puzzle à n pièces, $1 \leq n \leq k$, on a besoin de faire $n-1$ mouvements. Considérons maintenant un puzzle à $k+1$ pièces. Dans le dernier mouvement pour former ce puzzle à $k+1$ pièces, on va assembler deux blocs (le premier est à n_1 pièces et le second à n_2 pièces tels que $1 \leq n_1 < k+1$, $1 \leq n_2 < k+1$ et $n_1 + n_2 = k+1$). D'après l'hypothèse d'induction, il est nécessaire de faire $n_1 - 1$ mouvements pour former le bloc à n_1 pièces et $n_2 - 1$ pour former le bloc à n_2 pièces. Ainsi pour former le puzzle à $k+1$ pièces ont a besoin de $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = k$.*

Exercise 28 *Montrer que pour tout $n \geq 2$, n est premier ou produit de nombre premier.*

(aide : Un nombre $n \geq 2$ non premier peut toujours s'écrire sous la forme de $p.q$ avec $1 < p < n$ et $1 < q < n$)

1.5 Principe de dénombrement

Proposition 29 *Si A et B sont deux ensembles finis alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont finis et*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Proof. Pour dénombrer les éléments de $A \cup B$, on compte le nombre des éléments dans A, égale à $|A|$, et les éléments en B, égale $|B|$, mais comme ça on a compter deux fois les éléments dans $A \cap B$. Ainsi le nombre des éléments dans $A \cup B$ est égale à $|A| + |B| - |A \cap B|$.

Exercise 30 *Soit A et B deux ensembles finis. Vérifier les relations suivantes :*

1. $|A \cup B| \leq |A| + |B|$
2. $|A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$
3. $|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$
4. $|A \diagdown B| \geq |A| - |B|$

5. *Faite vous aider par un diagramme de Venn pour vérifier que*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| \\ - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

6. *Utiliser le principe d'induction pour cette généralisation de la précédente égalité :*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ +..... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| \end{aligned}$$

Exemple 31 *Sur 100 étudiants, 32 étudiants suivent un cours de mathématique, 20 étudiants suivent un cours de physique, 45 étudiants suivent un cours de biologie, 15 étudiants suivent un cours de mathématique et un cours de biologie, 7 étudiants suivent un cours de mathématique et un cours de physique, 10 étudiants suivent un cours de physique et un cours de biologie et 30 étudiants ne suivent aucun de ces trois cours.*

a) *Trouver le nombre des étudiants qui suivent les trois cours ?*

b) *Trouver le nombre des étudiants qui suivent seulement un seul cours ?*

Solution : Désignions par M, P et B les ensembles qui représentent le étudiants qui suivent respectivement un cours de math, physique et biologie. D'après l'énoncé, on sait que $|M| = 32$, $|P| = 20$, $|B| = 45$, $|M \cap B| = 15$, $|M \cap P| = 7$, $|P \cap B| = 10$, $\left|\overline{M \cup B \cup P}\right| = 30$.

a)

$$\begin{aligned} |M \cap B \cap P| &= |M \cup B \cup P| - |M| - |B| - |P| \\ &\quad + |M \cap B| + |M \cap P| + |P \cap B| \\ &= 70 - 32 - 20 - 45 + 7 + 15 + 10 \\ &= 5 \end{aligned}$$

b) On cherche a calculer $|M \oplus P \oplus B|$

Désignions par $A = M \oplus P$. On a $|M \oplus B \oplus P| = |A \oplus B| = |A| + |B| - 2\,|A \cap B|$.

Or $|A| = |M \oplus P| = |M| + |P| - 2\,|M \cap P| = 38$.

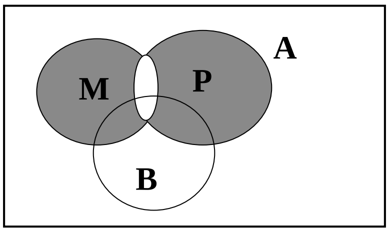


Figure 1.1:

Pour déterminer la valeur $|M \oplus P \oplus B|$, il nous reste a calculer $|A \cap B|$?
Essayons de nous faire aider par un diagramme de Venn :
La zone grise représente l'ensemble A. Sur la base de ce diagramme de Venn on peut constater que :

$$|A \cap B| = |M \cap B| + |P \cap B| - 2\,|M \cap P \cap B|$$

Ainsi

$$\begin{aligned}|M \oplus B \oplus P| = |A| + |B| - 2\,[|M \cap B| + |P \cap B| - 2\,|M \cap P \cap B|] \\ = 38 + 45 - 2 \times [15 + 10 - 10] = 53\end{aligned}$$

1.6 Ensemble à éléments multiple (multisets)

Un multiset est une collection d'éléments non nécessairement distincts. La multiplicité d'un élément d'un multiset est égale au nombre de fois qu'il apparaît dans ce multiset.

Exemple 32 *L'ensemble $A = \{a, a, a, c, d, d\}$ est un multiset. L'élément a est de multiplicité 3, b est de multiplicité 0, c est de multiplicité 1 et d est de multiplicité 2.*

Un ensemble classique est un multiset ou chaque élément est de multiplicité 1 ou 0. La cardinalité d'un multiset est égale à la cardinalité de l'ensemble qui lui est associer.

Exemple 33 *La cardinalité de A est $|A| = |\{a, c, d\}| = 3$.*

Soit A et B deux multisets. On définit dans ce qui suit quelques opérations élémentaire sur les multisets :

- *Union :* $A \cup B$ est un multiset où chaque éléments de $A \cup B$ à une multiplicité égale au maximum de sa multiplicité en A et B

Exemple 34 *Si* $A = \{a, a, a, c, d, d\}$ *et* $B = \{a, a, b, c, c\}$ *alors* $A \cup B = \{a, a, a, b, c, c, d, d\}$

- *Intersection :* $A \cap B$ est un multiset où chaque éléments de $A \cap B$ à une multiplicité égale au minimum de sa multiplicité en A et B

Exemple 35 *Si* $A = \{a, a, a, c, d, d\}$ *et* $B = \{a, a, b, c, c\}$ *alors* $A \cap B = \{a, a, c\}$

- *Différence :* $A \diagdown B$ est un multiset où chaque éléments de $A \diagdown B$ à une multiplicité égale à a sa multiplicité en A moins sa multiplicité en B si cette différence est positive, sinon sa multiplicité est égale à 0.

Exemple 36 *Si* $A = \{a, a, a, c, d, d\}$ *et* $B = \{a, a, b, c, c\}$ *alors* $A \diagdown B = \{a, d, d\}$

- *Somme :* $A + B$ est un multiset où chaque élément de $A + B$ à une multiplicité égale à sa multiplicité en A plus sa multiplicité en B.

Exemple 37 *Si* $A = \{a, a, a, c, d, d\}$ *et* $B = \{a, a, b, c, c\}$ *alors* $A + B = \{a, a, a, a, a, b, c, c, c, d, d\}$

1.7 Calcul propositionnel

Une *proposition* (ou énoncé) est une phrase logique qui peut être vraie. La véracité ou la fausseté d'une proposition constitue sa valeur de vérité.

Exemple 38 *"Hier j'ai pas dormis", "la vie est belle", "mon ami est égyptien", toute ces phrases constitue des propositions. Par contre une affirmation du type "où allez vous ?" ne peut pas être considérer comme une proposition car on peut pas parler de sa véracité ni de sa fausseté.*

Une proposition qui est toujours vraie est une tautologie et une proposition qui est toujours fausse est une contradiction.

Exemple 39 *Ces propositions :"15 est divisible par 3", "Tunis est la capitale de la Tunisie" représentent des tautologies. Par contre une contradiction serait du type : "la ville de Mahdia se trouve en plein désert" ou "1+1 est égale à 1".*

On désigneras chaque proposition par une lettre, par exemple p désigne la proposition "les étudiants de la 1IAGn sont intelligents". Ainsi on noteras que p est T (true) si la proposition p est vraie, et p est F (false) si la proposition p est fausse.

On dit que deux propositions p et q sont équivalentes si et seulement si ils ont la même valeur de vérité (si p est T alors q est T, si p est F alors q est F et inversement).

Exemple 40 *On peut facilement constater que ces propositions sont équivalentes : "je suis née en 1974" et "j'aurais 30 ans en 2004".*

Certaines propositions sont composés par d'autres proposition dite élémentaire. Par exemple la proposition "Il est intelligent et il étudie tout les soirs" est composé de la proposition "il est intelligent" et la proposition "il étudie tout les soirs". Dans ce qui suit on va étudier la valeur de vérité de ces propositions composées.

- *Conjonction :* Deux propositions p et q peuvent être liés par le mots "et" pour constituer une proposition composée. Ce connecteur est appelé conjonction, son symbole est $p \wedge q$ et nous lisons "p et q".

Exemple 41 *si p est la proposition "il est intelligent" et q est la proposition "il étudie tout les soirs" alors $p \wedge q$ est la proposition "il est intelligent et il étudie tout les soirs". On note que si p est T et q est T alors $p \wedge q$ est T. Par contre si p ou q est F alors $p \wedge q$ est F.*

On déduit dans ce qui suit la table de vérité de la conjonction :

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

– *Disjonction* : Deux propositions peuvent être liée par le mots "ou" (dans le sens et/ou) pour constituer une proposition composée. Ce connecteur est appelé disjonction, son symbole est $p \vee q$, que nous lisons "p ou q".

Exemple 42 *si p est la proposition "il est intelligent" et q est la proposition "il étudie tout les soirs" alors $p \vee q$ est la proposition "il est intelligent ou il étudie tout les soirs". On note que si p est F et q est F alors $p \vee q$ est F. Par contre si p ou q est T alors $p \wedge q$ est T.*

On déduit dans ce qui suit la table de vérité de la disjonction :

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

– *Négation* : Toute proposition p, par exemple "l'étudiant est intelligent", à qui on ajoute une phrase du type "il est faux que ...." ou à laquelle on fait insérer la location "ne ... pas" devient une autre proposition appelé négation de p. Le symbole de négation est $\overline{p}$ qu'on lit "non p". D'autres notations sont utiliser parmi eux on site : p', $\tilde{}p$ et $\mathsf{q}p$.

La table de vérité de la négation est

p	$\overline{p}$
T	F
F	T

– *Proposition conditionnée* : Beaucoup de proposition, particulièrement en mathématique, sont de a forme "si p alors q". De tels propositions sont dit conditionner et représenté par $p \rightarrow q$, qui est souvent lu comme "p implique q".

Exemple 43 *si p est la proposition "la fonction f est dérivable" et q est la proposition "la fonction f est continue" alors $p \rightarrow q$ est la proposition "si la fonction f est dérivable alors la fonction f est continue". On note que si p est T et q est T alors $p \rightarrow q$ est T. Par contre si p est T et q est F alors $p \rightarrow q$ est F puisque le travail implique la réussite. Examinons le cas ou p est F, dans ce cas quelque soit la vérité de q la proposition $p \rightarrow q$ n'est pas fausse, donc $p \rightarrow q$ est T.*

On déduit dans ce qui suit la table de vérité de la proposition conditionnée :

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- *Proposition biconditionnée :* Une autre formulation souvent employer est "p si seulement si q". Une propositions qui présente cette structure est dite biconditionnée et on la note $p \leftrightarrow q$.

Exemple 44 *Si p est la proposition "Il travail beaucoup" et q est la proposition "Il reçoit un bon salaire" alors $p \leftrightarrow q$ est la proposition "il travail beaucoup si et seulement si il reçoit un bon salaire". Il est clair que si p est T et q est T ou si p est F et q est F alors $p \leftrightarrow q$ est T. Par contre si p est T et q est F ou si p est F et q est T alors $p \leftrightarrow q$ est F (dans les deux cas ou bien l'employeur ou l'employé n'a pas d'intérêt).*

On déduit dans ce qui suit la table de vérité de la proposition biconditionnée :

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Exemple 45 *Un étudiant en 1IAGn nous fait parvenir ces deux propositions :*

p : *"j'aime mon père"*

q : *"si j'aime mon père alors j'aime ma mère"*

Montrer que quelque soit son attitude (il ment ou il dit la vérité), cet étudiant aime son père.

Supposons que l'étudiant ment. Alors p est F et q est F. p est une proposition conditionnées dont p est une proposition élementaire. D'après le tableau de vérité des propositions conditionnées si la première proposition est F alors la proposition conditionnée est T ce qui contredit l'hypothèse que q est F. Ainsi, l'étudiant ne ment pas et p est T.

Exemple 46 *Sur une île, il y a deux tribus dont les membres de la première disent toujours la vérité et les membres de la seconde mentent toujours. On arrivant sur l'île, on a demander à un de ces habitants s'il y a de l'or sur l'île. Il nous dit la chose suivante "il y a de l'or sur l'île si et seulement si je mens pas". La question est maintenant de savoir s'il y a ou pas de l'or sur l'île.*

Soit p la proposition "il y a de l'or sur l'île" et q la proposition "je dits la vérité". La réponse de l'habitant n'est autres que la proposition biconditionnée $p \leftrightarrow q$. Supposons que l'habitant dit la vérité. Donc $p \leftrightarrow q$ est T et aussi q est T. Donc d'après le tableau de la vérité des propositions biconditionnées p est T. Dans l'autre cas si l'habitant ment, alors $p \leftrightarrow q$ est F et aussi q est F. D'après le tableau de la vérité des propositions biconditionnées p est aussi T. on conclut ainsi que quelque soit la tribus de l'habitant, il y a de l'or sur l'île.

Exemple 47 *Il y a deux restaurants dans une même rue. Le premier restaurant affiche le slogan "la bonne nourriture coûte chère" et le second restaurant affiche le slogan "le nourriture pas chère n'est pas bonne". ces deux slogan sont-ils identique ?*

Soit p la proposition "la nourriture est bonne" et q la proposition "la nourriture pas chère". Le premier restaurant affiche donc $p \rightarrow \overline{q}$ et le second restaurant affiche $q \rightarrow \overline{p}$. Construisons le tableau de vérité des deux proposition conditionnée :

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \rightarrow \overline{q}$	$q \rightarrow \overline{p}$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

On remarque d'après le tableau ci dessus que les deux propositions sont équivalentes.

Exercise 48 *1.*

2. *Montrer que les deux proposition "p implique q et q implique p" est équivalentes à la proposition biconditionnée "p si et seulement si q".*
3. *Vérifier que ces deux propositions sont équivalentes : $p \rightarrow q$ et $\overline{p} \vee q$.*
4. *Montrer qu'une proposition biconditionnée peut être réécrite en utilisant les trois connecteur conjonction, disjonction et égation.*

Solution :

1.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

2.

p	q	$p \to q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

3. On sait que $p \leftrightarrow q$ est équivalente à $(p \to q) \wedge (q \to p)$. Or, $p \to q$ est équivalente à $\overline{p} \vee q$ donc $q \to p$ est équivalente à $\overline{q} \vee p$. Ainsi on conclut que $p \leftrightarrow q$ est équivalente à $(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee p)$.

1.8 Modélisation mathématique

On termine ce chapitre par une simple question : A quoi servent les mathématique dans la résolution des problèmes réels ?

La réponse a été illustrer dans tout les exemples de ce chapitre. L'idée été toujours de partir des cas réel pour après illustrer l'outils mathématique. On peut résumer la résolution de ces exercices dans ce shéma :

La tache la plus difficile est celle de passer du problème réel à la formulation mathématique. Cette étape est dite : Modélisation mathématique.

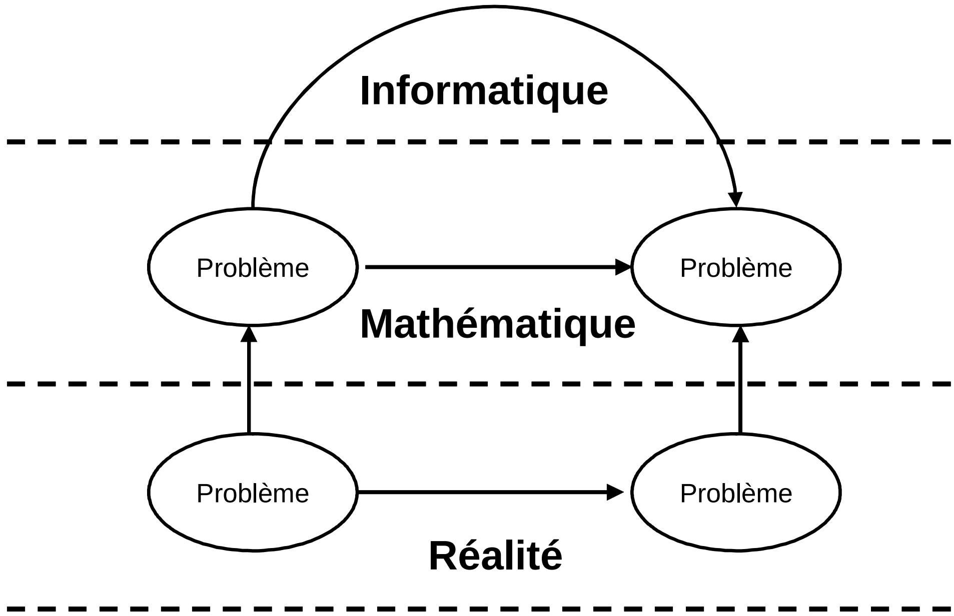

Informatique
Problème
Problème
Mathématique
Problème
Problème
Réalité

Figure 1.2:

Chapter 2

Permutations et combinaisons

2.1 Introduction

Dans le premier chapitre on s'est intéressé à la théorie des ensembles et on a définie entre autre la notion d'ensembles finis. Dans ce chapitre, on va étudier quelques éléments relatifs à ces ensembles. Ainsi, on essayeras de donner quelques éléments de réponse à des questions du type :

- A partir de l'ensemble des éléments 1IAGn, combien peut on former de groupes d'étudiants (y compris l'ensemble qui contient aucun étudiants). Ceci n'est autre que le nombre d'éléments dans l'ensemble des parties de 1IAGn.
- Combien on peut former de groupe de 11 étudiants sans tenir compte de l'ordre de choix de ces étudiants pour former une équipe de football mixte.
- Quelle est le nombre de possibilités d'avoir le majeur et le vice majeur de la classe sachant que tout les étudiants ont les même chance de le devenir ?

Ces questions et d'autres feront l'objet de ce chapitre.

2.2 Les principes fondamentaux

Une expérience est un processus physique qui génère un certains nombres de résultat qu'on peut observer. Par exemple, placer des boules dans des urnes, jeter une pièce de monnaie, tirer une carte parmi un jeu de 32 cartes, ...etc. Parmi ces expériences il y a celles qui sont composées. Par exemple tirer un gagnant parmi 300 candidats et lui offrir un cadeau parmi 20 cadeaux possibles.

Pour pouvoir calculer le nombre de résultats possible des expériences composées, il faut respecter ces deux principes :

- **Principe de la somme :** Si une première expérience à m résultats possibles et une deuxième expérience à n résultats possibles alors on a $m + n$ résultats possible si une de ces deux expériences se réalise.

  Exemple 49 *Le principe de la somme peut être retenue de la manière suivante : la cardinalité de deux ensembles A et B disjoint* ($A \cap B = \emptyset$) *est égale a la somme de leurs cardinalité respective* ($|A \cap B| = |A| + |B|$).
- **Principe du produit :** Si dans un premier lieu la première expérience se réalise avec m états possibles et dans un second lieu la deuxième expérience se réalise avec n états possibles, alors on a $m \times n$ résultats possible, si les deux expériences se réalisent successivement..

  Exemple 50 *De même on peut établir un lien entre le principe de produit et la théorie des ensembles finis. Ainsi si A et B sont deux ensembles finis alors* $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Exemple 51 *On propose à un étudiant de choisir parmi 7 cours dont 5 le matin et 2 le soir. Il y a 5*2 choix possible s'il veut suivre un cours le matin et un cours le soir et 5+2 choix possible s'il choisi simplement un seul cours.*

Exemple 52 *Combien y a t'il de manières pour former un nom de 4 caractères avec le premier caractère est une lettre, le second caractère et le troisième caractère peuvent être des chiffres ou des lettres, et le quatrième caractère est X, Y ou Z.*

Si on partage l'expérience en 4 expériences A_1, A_2, A_3 *et* A_4 *ou* A_i *représente le nombre de choix possibles pour le* $i^{ème}$ *caractères alors on a*

$$|A_1| = 26, \ |A_2| = 26 + 10, \ |A_3| = 26 + 10, \ |A_4| = 3,$$

D'après le principe du produit, le nombre totale des cas possibles, pour former ce nom à 4 caractères, est égale à : $26 \times 36 \times 36 \times 3 = 101088$.

2.3 Permutations

Considérons le problème de placer trois boules colorées, rouge, bleu et blanc dans 10 boites numéroté de 1 à 10. On veut savoir le nombre de manière de placer ces boules dans ces 10 cases sachant qu'une case ne peut contenir plus qu'une boule.

Essayons de placer les boules une à une. La boules rouge à 10 placement possibles équivalent au nombre de cases vides. Aussitôt placer dans une case la boule bleu auras simplement 9 choix possibles car la boules rouge a déjà pris une case. La boule blanche n'auras ainsi que 8 emplacement possible qui lui laisse le placement des deux précédentes boules. Ainsi, d'après le principe de produit, le nombre totale de placement possible est égale à 10*9*8=720.

De manière générale, le nombre de possibilités pour placer r boules dans n cases $(n \geq r)$ où chaque case ne peut contenir plus qu'une boules est égales à

$$n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

On note par $P(n,r)$ la quantité $\frac{n!}{(n-r)!}$.

Plusieurs problèmes de dénombrement peuvent être résolu par des similitudes avec le problème de placement des boules dans des cases.

Exemple 53 *De combien de manière peut-on affecter trois examens durant une période de 5 jours de manière à ce que 2 examens ne se passent pas le même jour.*

*Ce problème est équivalent au problème de placement de 3 boules (distinct) dans 5 cases ou chaque case ne peut pas contenir plus qu'une boule. Ainsi le nombre d'affectations possible est égale à 5*4*3=60*

Exemple 54 *Dans une soirée il s'est présenté 5 filles pour danser avec 10 garçons une dance slow. De combien de manières peut-on affecter ces filles aux 10 garçons ? (résultat : 10*9*8*7*6=*$\frac{10!}{5!}$*=30240)*

Le problème de placer des boules dans des cases est équivalent au problème de permuter n objets. Prenons l'exemple de placer 10 étudiants sur 10 chaises (permuter 10 étudiants). Le nombres de placements possible (différents) est dit le nombre de permutations de 10 objets. Ainsi on peut considérer les chaises comme des boules et les étudiants comme des cases. La première chaise peut être attribuer à 10 étudiants, la deuxième a 9 choix possible, etc. Finalement, le résultats qu'on obtient est 10!. Plus généralement, il y a $n!$ manière pour permuter n objets.

Maintenant considérons le problème d'arrangement de r objets parmi n objets distincts. Un arrangement de r objets parmi n, consiste à placer

r objets parmi n dans r cases (avec $r \leq n$). Donc, la première case à n chois possible, la deuxième case à $n-1$ candidats, ..., et la $r^{ième}$ case à $(n-r+1)$ possibilité. Ainsi, il y a $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-r+1) = P(n,r)$ possibilités pour arranger r objets parmi n objets distincts.

Exemple 55 *Déterminer le nombre de possibilités de construire un numéro à 4 chiffres dont tous ces chiffres sont distincts. Le problème est équivalent au problème d'arrangement de 4 parmi 10 chiffres. Ce qui nous donne* $P(10,4) = 5040$ *possibilités. Parmi ces nombres il faut éliminer ceux qui commence par 0 dont le nombre est égale à 9*8*7=540. Ainsi le nombre totale de possibilités de former un nombre à 4 chiffre distinct est égale à 5040-504=1536. Ce nombre peut être obtenue par 9*9*8*7 où on a 9 candidats pour la première case (exempt le 0), 9 pour la deuxième case (il on reste 8 et on ajoute le 0), 8 pour la troisième case et enfin 7 pour la dernière case.*

Un autre problème équivalent est celui de sélectionner successivement r objets parmi n objets distincts. L'analogie entre les deux problèmes peut être établi comme suit : supposer que les n objets sont les cases et la sélection consiste à marquer r de ces cases une à une avec des étiquettes numérotés de 1 à r (distinctes). Ainsi, le nombre de possibilité de sélectionner successivement r objets parmi n objets distincts est $P(n,r)$.

Exemple 56 *Combien de possibilités a-t-on pour former une expression à 7 caractères dont les quatre premier sont des lettres distincts et les trois derniers des chiffres distinct (réponse :* $P(26,4) * P(10,3) = 258336000$*)*

On retourne au problème de placer 3 boules colorée distinct dans 10 cases. Supposons que les cases peuvent contenir un nombres infini de boules. Ce qui fait que la première boule comme la deuxième et la troisième ils ont chacune 10 choix possibles. Ainsi le nombre de possibilités totale est $10*10*10=10^3$.

Plus généralement, le nombre de possibilités pour placer r boules distincts dans n cases, où chaque case peut contenir autant de boules que possibles, est égale à n^r.

Exemple 57 *Soit* A *un ensemble de cardinalité* r*. Quelle le nombre des sous ensembles de* A *(on cherche la cardinalité de l'ensemble des parties de* A*) ?*

Ce problème est équivalent au problème de placer r *éléments dans deux cases chacun ayant une capacité infini. Pour mieux voir la similitude entre* *les deux problème prenez le cas simple ou* $A = \{a, b, c\}$ *. Les affectations possibles sur les deux cases sont :*

case 1	*case 2*
$\{a, b, c\}$	$\emptyset$
$\{a, b\}$	$\{c\}$
$\{a, c\}$	$\{b\}$
$\{b, c\}$	$\{a\}$
$\{a\}$	$\{b, c\}$
$\{b\}$	$\{a, c\}$
$\{c\}$	$\{a, b\}$
$\emptyset$	$\{a, b, c\}$

On remarque que les ensembles présent dans une des deux cases représente tout l'ensemble des sous ensembles possible de A. Ainsi le nombres de ces sous ensembles est égales au nombres des affectations des éléments de A sur les deux cases à capacité infini. On conclut ainsi que le nombre de sous ensembles possibles est égale à 2^r.

Supposons qu'on veut arranger r objets parmi n modèles d'objets distincts où on a un nombre infini de chaque modèle d'objets. On peut dénombrer n^r cas possibles. Ainsi, si on prend r emplacements, le premier emplacement a n candidats possibles, de même pour le second emplacement, le troisième emplacement, ..., et le $r^{ième}$ emplacement. Ce qui fait un total de n^r cas possibles.

Le problème de sélectionner successivement r objets parmi n objets distincts avec répétition (on remet à chaque fois l'objet sélectionné) est équivalent au problème de placer r boules distincts dans n cases à capacité infini. L'analogie entre les deux problèmes peut être établi comme suit : supposer que les n objets sont les cases et la sélection consiste à étiquter avec r étiquette numérotés ces cases avec possibilité d'étiquter plus qu'une fois la même cas (répétition). Ainsi, le nombre de possibilité de sélectionner successivement r objets parmi n objets distincts avec répétition est n^r.

Exemple 58 *Il y a* 9×10^3 *manières possibles de constituer un nombres à 4 chiffres dont* $9 \times 10^3 - P(10, 4)$ *nombres qui contient des chiffres qui se répètent.*

Exemple 59 *On sait qu'il y a* 2^r *séquences binaire de longueur* r*. On veut savoir parmi ces séquences le nombre de celles qui contiennent un nombre pair de 1 ?*

Essayons de coupler les séquences de manières à ce que deux séquences dans un même couple diffère seulement dans le $r^{ième}$ *chiffre. On peut voir que le nombre de couple est égale à* $\frac{1}{2}2^r$*. On sait que dans un couple si une des deux séquences présentent un impair de 1 alors la seconde présentent un nombre pair de 1 puisque le* $r^{ième}$ *chiffres est 0 ou 1. Ceci nous amène à dire que le nombre des séquences qui contiennent un nombre pair de 1 est égale à* 2^{r-1}.

Exemple 60 *Quel est le nombre des séquences formé de r chiffres parmi 0,1,2,3, 4 et qui contiennent un nombre pair de 1 ?*

Parmi les 5^r *séquences qui peuvent être formé par les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4, il y a* 3^r *qui ne contiennent ni 0 ni 1 ce qui veut dire un nombre pair de 1. Groupons les* $5^r - 3^r$ *séquences de manières a ce que les séquences d'un même groupe présentent le même emplacement des chiffres 2, 3 et 4 (par exemple le groupe qui contient tout les séquence du type 23xx4xx2 où les x représente des 1 ou 0). On remarque que la moitié des séquences pressentes dans chaque groupe présente un nombre pair de 1. Ainsi en totale il y a* $\frac{5^r-3^r}{2}$ *séquences avec un nombre pair de 1. Finalement il y a* $3^r + \frac{5^r-3^r}{2}$ *séquences qui présente un nombre pair de 1.*

Exemple 61 *Un étudiant veut planifiée pendant une semaine la révision de 4 matières : Math, Physique, Chimie et Economie. Le nombre totale de plans de révision est* 4^7*. On veut savoir le nombre des plans de révision qui prévoient la révision des 4 matières ?*

Pour ceux qui croient que la bonne réponse est $P(7,4) * 4^3$ *(ce qui correspond au nombre de manières d'affecter les 4 matières sur un jour et les autres matières sur les 3 jours qui reste), ils leurs suffit de vérifier que leurs raisonnement est faux juste s'ils font le même raisonnement avec 2 matières et 4 jours.*

Pour arriver au bon résultat, la manières de faire est la suivante : Soit A_1 *l'ensemble de tout les plans de révisions qui ne prévoient pas de séances de révision pour la matière Math,* A_2 *l'ensemble de tout les plans de révisions qui ne prévoient pas de séances de révision pour la matière Physique,* A_3 *l'ensemble de tout les plans de révisions qui ne prévoient pas de séances de révision pour la matière Chimie et* A_4 *l'ensemble de tout les plans de révisions qui ne prévoient pas de séances de révision pour la matière Economie.*

On a $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ représente l'ensemble des plans de révisons ou au moins la révision d'une matière n'est pas planifier. Ainsi $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$ est l'ensemble des plans de révision ou au moins une matière est planifié.
On a :

- $|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 3^7$
- $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = 2^7$
- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 1^7$
- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$

On conclusion, le nombre des plans de révisons ou au moins la révision d'une matière est planifier est

$$4^7 - 4 * 3^7 + 6 * 2^7 - 4$$

Considérons maintenant le problème de placer 4 boules dont 2 rouges, une bleue et une blanche dans 10 cases numérotés ou chaque case ne peut contenir qu'au plus une boule. Si on arrive a distinguer les deux boules on marquant la première boule par un marqueur. Ainsi le nombre de possibilités est $P(10, 4)$. Si on arrive pas a distinguer entre les deux boules rouge, alors le placement qui consiste à mettre la première boule rouge dans la première case, la deuxième boule rouge dans la deuxième case, la boule bleue dans la troisième case et la boule blanche dans la quatrième case est le même placement qui se résume à mettre la deuxième boule rouge dans la première case, la première boule rouge dans la deuxième case, la boule bleue dans la troisième case et la boule blanche dans la quatrième case. Ceci nous conduit à dire que si on arrive pas a distinguer les deux boules alors on auras $\frac{P(10,4)}{2}$ placement possibles. Si on refait le même raisonnement avec 3 boules rouge au lieu que 2 boules rouges. Ainsi on arrive à dire que le nombre de cas possibles est $\frac{P(10,4)}{3!}$ ou le $3!$ représente le nombre de permutations des trois boules rouges dans les trois cases.

De manière générale, le nombre de possibilités pour placer r boules dont q_i boules sont de même natures, $i = 1, .., t$, dans n cases, est égale à $\frac{P(n,r)}{q_1!q_2!...q_t!}$.

Exemple 62 *De combien de manières peut-on peindre 12 bureaux dont 3 en blanc, 2 en gris et 7 en bleu.*

La réponse est $\frac{12!}{3!2!7!}$.

On note aussi que le nombre de permutations de n objet dont q_i sont de même nature, $i = 1, ..., t$, est égale à

$$\frac{n!}{q_1!q_2!...q_t!}$$

Exemple 63 *Combien de mots de 5 lettres peut-on faire avec les lettres du mot "maman".*

La réponse est $\frac{5!}{2!2!}$.

Exemple 64 *On suppose que les répétions ne sont pas autorisées :*

1. *Combien de nombres de trois chiffres peut-on écrire avec les six chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 9 ?*
   la réponse : $6 \times 5 \times 4 = 120$
2. *Combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ?*
   la réponse : $2 \times 5 \times 4 = 40$ *(la première case doit contenir 2 ou 3)*
3. *Combien sont pairs ?*
   la réponse : $5 \times 4 \times 2 = 40$ *(la dernière case doit contenir 2 ou 6)*
4. *Combien sont impairs ?*
   la réponse : $5 \times 4 \times 4 = 80$ *(la dernière case doit contenir 3 ou 5 ou 7 ou 9)*
   Aussi on peut raisonner de la manière suivante : le nombres des impairs est égales au totale des nombres à 3 chiffres moins le nombre de ceux qui sont pairs : $6 \times 5 \times 4 - 5 \times 4 \times 2 = 80$
5. *Combien sont multiples de 5 ?*
   la réponse : $5 \times 4 = 20$ *(la première case doit contenir 2 ou 3)*

Exemple 65

1. *Quel est le nombre de possibilités offertes à r garçons et à s filles pour s'asseoir en ligne ?*
   la réponse : $(r + s)!$
2. *Quel est le nombre de possibilité offertes à r garçons et à s filles pour s'asseoir autour d'une table ?*
   la réponse : $(r + s - 1)!$ *(ce qui diffère par rapport au cas de s'asseoir en ligne qu'un emplacement circulaire est équivalent a $r + s$ emplacement en ligne. Par exemple mettre A, B et C autour d'une table on auras*

les cas suivant équivalent : ABC, BCA et CAB. Comme il y a $(r+s)!$ *placement possibles en ligne, alors on* $\frac{(r+s)!}{(r+s)}$ *placement autour d'une table)*

3. *Quel est le nombre de possibilités offertes à r garçons et à s filles pour s'asseoir en ligne mais regroupés ?*

   la réponse : $2 \times r! \times s!$ *(permuter les deux groupes chacun seul et après il y a 2 cas pour placer les deux groupes l'un a coté de l'autre : F...FG...G ou G...GF...F)*

4. *Quel est le nombre de possibilités offertes à r garçons et à s filles pour s'asseoir en ligne où les filles sont regroupées ?*

   la réponse : $(r+1) \times r! \times s!$ *(permuter les deux groupes chacun seul et après il y a* $r+1$ *manières pour intercaler le groupes de filles qui doit resté regroupé dans celui des garçons : F...FG...G, GF...FG...G, .GGF...FG...G, ..., G...GF...F)*

2.4 Combinaison

Considérons le problème de placer trois boules identiques dans 10 cases numérotés de 1 à 10. Le nombre de placement possible est égale à $\frac{10 \times 9 \times 8}{3!}$.

On général le nombre de possibilité pour placer r boules identiques dans n cases est égale à

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Cette quantité est noté $C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Exemple 66 *Un étudiant veut planifier pour ces dîner pendant la semaine 3 fois du Spaghetti. Combien peut on avoir de plan possible ?*

Si on considère les 3 dîner Spaghetti comme 3 boules identiques qu'on va placer dans 7 cases qui représente les jours de la semaine, alors le nombre de plan possible est $C(7,3) = \frac{7!}{3!(4)!} = 35$

Exemple 67 *Combien il y a de séquence binaire de longeur 32 qui contiennent exactement sept fois le chiffre 1.*

La réponse est $C(32,7)$*. Il suffit de prendre les 1 pour des boules identiques à placer dans 32 cases.*

Un problème équivalent à placer r boules identiques dans n cases est le problème de sélectionner simultanément r objets parmi n objets distincts. L'analogie entre les deux problèmes peut être établi comme suit : supposer que les n objets sont les cases et la sélection consiste à marquer r de ces cases (avec le même marqueur). Le nombre de possibilité de sélectionner simultanément r objets parmi n objets distincts est $C(n, r)$.

Exemple 68 *Quelle le nombre de sous ensembles de cardinalité r d'un ensemble de cardinalité n (avec $r \leq n$) ?*

La réponse est $C(n, r)$.

Le nombre de manière de choisir simultanément r objets parmi n objets distincts est égale au nombre de manière de choisir simultanément $n - r$ objets parmi n objets distincts. Ainsi, on peut conclure que

$$C(n, r) = C(n - r; r)$$

Exemple 69 *Il y a $C(11, 5) = 462$ manières pour sélectionner une comité de 5 étudiants parmi cette ensemble de 11 étudiants $\{I, II, III, ..., XI\}$*

1. *Combien il y a de possibilité que l'étudiant I est choisi membre de la comité ?*

   $C(10, 4) = 210$

2. *Combien il y a de possibilité que l'étudiant I ne fait pas partie de la comité ?*

   $C(10, 5) = 252$. *On peut aussi faire le raisonnement suivant :* $C(11, 5) - (10, 4) = 462 - 210 = 252$

3. *Combien il y a de possibilité qu'au moins un des deux étudiants I et II fait partie de la comité ?*

   Le nombre de comités qui contiennent les deux étudiants I et II est égale à $C(9, 3) = 84$. Le nombre de comités qui contiennent l'étudiant I et pas l'étudiant II (resp. l'étudiant II et pas l'étudiant I) est égale à $C(9, 4) = 126$. Ainsi le nombre de possibilité est égale à $C(9, 3) + 2 * C(9, 4) = 336$.

   Un autre raisonnement peut donner le même résultat. On a $C(9, 5) = 126$ possibilité que la comité ne comprend ni l'étudiant I, ni l'étudiant II. Ainsi le nombre de possibilité qu'au moins un des deux étudiants I et II fait partie de la comité : $C(11, 5) - C(9, 5) = 462 - 126 = 336$.

Exemple 70 *Etant donnés 12 points d'un plan : $A, B, ...$ sans que trois d'entres eux soient alignés.*

1. *Trouver le nombres de droites définies par ces points ?*
   Deux point définissent une droite. Donc il y a $C(12, 2)$ droites.
2. *Trouver le nombre de droites passant par A ?*
   Les droites passant par A sont définies par un autre point que A. Il y a donc 11 droites différentes passant par A.
3. *Trouver le nombre de triangles définies par ces points ?*
   Un triangle est défini par trois points. Il y a donc $C(12, 3)$ triangles différents.
4. *Trouver le nombre de triangles ayant A pour sommet ?*
   Pour définir un triangle de sommet A, nous avons besoin de 2 autres points autre que A. Donc il y a $C(12, 2) = 55$ triangle ayant A comme sommet.
   On peut aussi raisonner comme suit : Il y a $C(11, 3) = 165$ triangles n'ayant pas A comme sommet, donc il existe $C(12, 3) - C(11, 3) = 220 - 165 = 55$ triangles ayant A comme sommet.

Supposons qu'on veut placer r boules identiques dans n cases où chaque case peut contenir infiniment de boules. Ce problème peut être assimiler au problème d'arranger $n+1$ un et r zero, de manière a ce que le chiffre 1 figure au début et à la fin de la séquence. Ainsi, on si considère les 1 comme les parois des cases et les 0 comme les boules identiques à placer (par exemple 1001101...1 est une séquence possible qui signifie qu'il y a 2 boules dans la première case, zéro boule dans la seconde case et une boule dans la troisième case ...) alors le nombre de possibilités pour placer r boules identiques dans n cases où chaque case peut contenir infiniment de boules est égales au nombre de manières pour arranger r zéros et $n - 1$ un : $\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = C(n + r - 1, r)$.

Un problème similaire à celui de placer de r boules identiques dans n cases où chaque case peut contenir infiniment de boules est le problème de sélectionner simultanément r objets parmi n objets distinct avec répétition (simultanément veut dire ici que l'ordre ne compte pas). L'analogie entre les deux problèmes peut être établi comme suit : supposer que les n objets sont les cases et la sélection consiste à marquer r de ces cases avec la possibilité de marquer la même case plus qu'une fois. Le nombre de possibilité de sélectionner simultanément r objets parmi n objets distincts avec répétition est $C(n + r - 1, r)$.

Exemple 71 *Le nombre de manière de choisir (simultanément) trois parmi les 7 jours de la semaine avec répétition est* $C(7+3-1,3) = C(9,3) = 84$. *Le nombre de choisir simultanément 7 jours parmi 3 jours (ici la répétition est claire) est* $C(3+7-1,7) = C(9,7) = 36$.

Exemple 72 *Le nombre de triplets issue du lancement simultané de 3 dé est égale à* $C(6+3-1,3) = C(8,3) = 56$.

2.5 Résumé du chapitre

1. $P(n,r)$
   - Placer r boules *distincts* dans n cases où chaque case peut contenir au maximum une boule
   - *Arranger* r objets parmi n objets distincts
   - Sélectionner *successivement* r objets parmi n objet distincts
2. n^r
   - Placer r boules distincts dans n cases où chaque case peut contenir autant de boules que possible
   - Sélectionner *successivement* et *avec répétition* r objets parmi n objet distincts
3. $\frac{P(n,r)}{q_1!...q_t!}$
   - Placer r boules dont q_i boules sont de même nature, $i = 1, ..., t$, dans n cases où chaque case peut contenir au maximum une boule
   - Sélectionner *successivement* r objets parmi n objet dont q_i boules sont de même nature, $i = 1, ..., t$
4. $C(n,r)$
   - Placer r boules *identiques* dans n cases où chaque case peut contenir au maximum une boule
   - Sélectionner *simultanément* r objets parmi n objet distincts
5. $C(n+r-1,r)$
   - Placer r boules *identiques* dans n cases où chaque case peut contenir autant de boules que possible
   - Sélectionner *simultanément* et *avec répétition* r objets parmi n objet distincts

Remarque 73 *successivement= l'ordre intervient*
simultanément= l'ordre n'intervient pas

Chapter 3

Relations et Fonctions

3.1 Introduction

On parle souvent de relations entre objets discrets. Ainsi, dans un groupe d'étudiants on peut dire que deux étudiants sont reliés s'ils sont de la même région ou s'ils portent le même nom de famille. Aussi, on dit que deux objets ne sont pas reliés s'ils n'ont pas une propriété commune.

Ces relations entre éléments sont de deux types :

- des relations binaires qui mettent en relation deux éléments seulement
- des relations n-aires qui relient n éléments

3.1.1 Produit cartésien

Soient A et B deux ensembles. On appelle produit cartésien de A et B, noté $A \times B$ l'ensemble de tous les couples ordonnés (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$.

Exemple 74 $\{a, b\} \times \{a, c, d\} = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d)\}$

On écrit fréquemment A^2 au lieu de $A \times A$. De la même façon, on peut écrire A^n au lieu de $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ où il y a n termes égaux à A.

3.1.2 Relation binaire

Soient A et B deux ensembles, on appelle relation binaire, notée R, un sous ensemble de $A \times B$, constitué des couples (x, y), tel que $y \in B$ et $x \in A$.

Il existe différentes notations pour exprimer que x est relié à y par R :

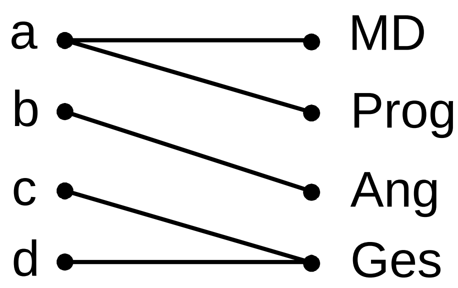


Figure 3.1:

- Notation préfixe : $R(x, y)$
- Notation postfixe : $(x, y) \in R$
- Notation infixe : xRy

Dans ce cour, on retiens la notation postfixe.

Exemple 75 *Soit* $A = \{a, b, c, d\}$ *l'ensemble des étudiants,* $B = \{MD, PROG, ANG, GES\}$ *l'ensemble des cours.*
Alors $A \times B$ *est tous les couples possibles d'étudiants et cours.*
$R = \{(a, MD), (b, ANG), (d, GES), (c, GES), (a, PROG)\}$ *peut décrire le cours que les étudiants suivent régulièrement*
$T = \{(a, MD), (d, GES)\}$ *les cours dont les étudiants ont des difficultés.*

3.1.3 Représentation d'une relation

Il existe différentes manières de représenter une relation :

- Par un tableau où les lignes désignent les éléments de A et les colonnes les éléments de B et chaque cellule correspond à un couple possible. Ainsi, les couples qui sont en relation sont marqués par le symbôle $\times$.

R	MD	PROG	ANG	GES
a	$\times$	$\times$		
b			$\times$	
c				$\times$
d				$\times$

- Par un graphique où les éléments de A sont illustrés à gauche, les éléments de B à droite et la relation se manifeste par des lignes qui joignent les éléments d'un même couple.

3.1.4 Opérations sur les relations

Etant donnée que les relations sont des ensembles, on peut toujours définir l'union, l'intersection, la différence, la différence symétrique et la négation des relations.

Soit $A = \{a, b, c, d\}$ l'ensemble des étudiants et B =$\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$ l'ensemble des modules enseignés. Soit R_1 une relation binaire de A à B qui décrit les modules que les étudiants prennent et R_2 une relation binaire de A à B qui décrit les modules dont les étudiants présentent un intêret personnel. Alors :

- $R_1 \cap R_2$ est une relation binaire de A à B qui décrit les modules que les étudiants prennent et à lesquels ils s'interrêssent.
- $R_1 \cup R_2$ est une relation binaire de A à B qui décrit les modules que les étudiants prennent ou à lesquels ils s'interrêssent.
- $R_1 \oplus R_2$ est une relation binaire de A à B qui décrit les modules que les étudiants prennent sans être intéressés ou les modules qu'ils ne prennent pas malgré qu'ils s'y intéressent..
- $R_1 \backslash R_2$ est une relation binaire de A à B qui décrit les modules que les étudiants prennent sans présenter un intérêt .

Exemple 76 $A = \{$*les étudiants de 1IAGn*$\}$
R_1= *relation binaire de A dans A qui présente une relation professionnelle*
R_2 = *relation binaire de A dans A qui présente une relation amicale*
Essayer de définir $R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2, R_1 \oplus R_2, R_1 \backslash R_2$

3.1.5 Relation n-aire

Comme les relations binaires qui invoquent des relations entre les éléments de deux ensembles, on peut aussi trouver des relations qui impliquent 3 ensembles ou plus.

Ainsi, une relation tertiaire entre A, B et C est un sous ensemble du produit cartésien de $A \times B$ et C, noté $(A \times B) \times C$. Tout triplet de $(A \times B) \times C$ est de la forme $((a, b), c)$ où $(a, b) \in A \times B$ et $c \in C$.

Exemple 77 *Si* $A = \{a, b\}$, $B = \{\alpha, \beta\}$, $C = \{1, 2\}$ *alors* $(A \times B) \times C = \{((a, \alpha), 1), ((a, \alpha), 2), ((a, \beta), 1), ((a, \beta), 2), ((b, \alpha), 1), ((b, \alpha), 2), ((b, \beta), 1), ((b, \beta), 2)\}$

De manière générale, une relation n-aire entre $A_1, A_2, ..., A_n$ est un sous ensemble de $(((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4) ... \times A_n$.

3.2 Modèles relationnels pour les bases de données.

Un exemple exprimant l'utilité des relations entre les ensembles finis est d'introduire brièvement les modèles de bases de données.

Une base de données peut contenir plusieurs types d'informationinfprmation telles que la relation entre banque, fournisseur, clients, l'historique du travail ainsi que les informations personnelles sur les travailleurs....

De nos jours, on est capable de gérer des bases de données plus large et complexe. Une condition nécessaire pour cette réussite est la manière avec laquelle on organise ces bases de données de façon à ce que les opérations élémentaires comme ajouter ou supprimer une donnée, chercher une information ..., ne constitue pas une tâche difficile.

D'une manière générale pour comprendre une large variété de bases de données est à travers des modèles relationnels. Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ n ensembles non nécessairement distincts. Une relation n-aire entre $A_1, A_2, ..., A_n$ est connue sous le nom de *table* dans le langage des modèles relationnels pour les bases de données. Les ensembles $A_1, A_2, ..., A_n$ représentent le domaine de la table et n le degré de la table.

Par exemple, désignons par : $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ l'ensemble des clients, $P = \{P_1, P_2, ..., P_7\}$ la liste des produits et $C = \{J_1, J_2, ..., J_5\}$ les 5 premiers jours de la semaine où la livraison est possible. Nous définissons la table "demande" qui exprime que tel client demande un certains produit tel jours avec une certaine quantité :

Clients	Produits	Jours	Quantités
C_1	P_4	J_1	10
C_1	P_3	J_5	50
C_2	P_2	J_3	80
C_3	P_1	J_2	120
C_3	P_2	J_1	70
C_4	P_3	J_7	10

Une clé primaire dans la table est un domaine qui identifie les lignes de manière unique.

Dans l'exemple précédent, il n'existe pas de clé primaire car aucun des domaines clients, produits, jours ou quantités ne peut caractériser chaque ligne de la table de demande. Par contre l'association des deux domaines clients et produits peut caractériser les lignes de la table. Ainsi, dans la table de demande on a une clé primaire composée (i.e. un ensemble de domaines qui caractérisent les lignes de la table).

Ayant une collection de tables, on aimerait bien les manipuler. Dans ce qui suit, on va illustrer deux opérations : La projection et l'union.

Soit R une table de degré n. La projection de R est une m-aire relation $(m \leq n)$ obtenue par l'élimination de $n - m$ composantes des n-uplets dans R.

Par exemple, une projection de R notée $\pi_{2,3,4}$ (demande) de la table de demande donne une nouvelle table où on a seulement la liste des produits, jours et quantité. Les indices 2, 3, 4 dans le symbôle de la projection π indique les colonnes à garder. La table générée peut servir pour le service de production.

Produits	Jours	Quantités
P_4	J_1	10
P_3	J_5	50
P_2	J_3	80
P_1	J_2	120
P_2	J_1	70
P_3	J_7	10

Deux tables peuvent aussi être combinées pour donner une table plus grande. Soit R une table de degré n et S une table de degré m. Pour un entier p inférieur à m et à n, on peut construire la table $\tau_p(R * S)$ tel que

$$\tau_p(R * S) = \left\{ \begin{array}{c} (a_1, a_2, ..., a_{n-p}, b_1, ..., b_p, c_1, ..., c_{m-p}) \diagup \\ (a_1, a_2, ..., a_{n-p}, b_1, ..., b_p) \in R \\ (b_1, ..., b_p, c_1, ..., c_{m-p}) \in S \end{array} \right\}$$

Clients	Produits	Jours
C_1	P_1	Lundi
C_2	P_1	Lundi
C_2	P_2	Jeudi

Table de demande

Produits	Jours	Moyen de livraison
P_1	Lundi	Camion 1
P_2	Jeudi	Camion 2
P_2	Jeudi	Camion 3

Table de livraison

Clients	Produits	Jours	Moyen de livraison
C_1	P_1	Lundi	Camion 1
C_2	P_1	Lundi	Camion 1
C_2	P_2	Jeudi	Camion 2
C_2	P_2	Jeudi	Camion 3

Table τ_2(demande, livraison)

3.3 Opérations et propriétés des relations binaires

Pour le reste de ce chapitre, on va s'intéresserintérresser aux relations binaires sur un ensemble A, c'est à dire de A dans A.

Voici quelques exemples de relations binaires :

- La relation totale qu'on note T et qui regroupe tous les couples (a, b) de $A \times A$, i.e. $T = \{(a, b)/a \in A \text{ et } b \in A\} = A^2$
- La relation identité, notée I et qui regroupe tous les couples (a, b) de $A \times A$ tel que $a = b$, i.e. $I = \{(a, b)/a = b\}$
- La relation diversité, notée D et qui regroupe tous les couples (a, b) de $A \times A$ tel que $a \neq b$, i.e. $D = \{(a, b)/a \neq b\}$
- La relation vide, notée V et qui ne contient aucun couple, i.e. $V = \emptyset$.

3.3.1 Opérations sur les relations

Complémentarité

Soit A un ensemble fini et R une relation binaire sur A. Le complémentaire de R noté $\overline{R}$ est la relation binaire sur A qui regroupe tous les couples de $A \times A$ qui ne sont pas dans R, i.e. $\overline{R} = T \backslash R$.

Inverse

Soit A un ensemble fini et R une relation binaire sur A. L'inverse de R, noté R^{-1} est une relation binaire sur A qui regroupe les couples (b, a) où $(a, b) \in R$, i.e. $R^{-1} = \{(b, a)/(a, b) \in R\}$

Préapplication

Soit a un élément de A et R une relation binaire sur A. La préapplication de R à a est l'ensemble noté aR tel que $aR = \{b \in A/(a,b) \in R\}$

Postapplication

Soit a un élément de A. La postapplication de R à a est l'ensemble noté Ra.

$Ra = \{b \in A/(b,a) \in R\}$

Domaine et co-domine

Soit S une partie de A. On note $S.R = \{\{b \in A/\exists a \in S, (b,a) \in R\}$

On a aussi $S.R = S.R^{-1}$

Le domaine de R noté $dom(R)$ est $R.A$

Le co-domaine de R noté $codom(R)$ est $A.R$.

Produit relatif

Etant donné R_1 et R_2 deux relations définies sur A, le produit de R_1 et R_2 est la relation $R_1 \times R_2$ telle que

$R_1 \times R_2 = \{(a,b)/\exists c \in A \text{ avec } (a,c) \in R_1 \text{ et } (c,b) \in R_2\}$

Exemple 78 $A = \aleph$, $R_1 = \{(a,b)/b = a+1\}$, $R_2 = \{(a,b)/b = a+3\}$

$R_1 \times R_2 = \{(a,b)/\exists c \text{ avec } (a,c) \in R_1 \text{ et } (c,b) \in R_2\}$

$\Rightarrow R_1 \times R_2 = \{(a,b)/\exists c \text{ avec } c = a+1 \text{ et } b = c+3\}$

$\Rightarrow R_1 \times R_2 = \{(a,b)/b = a+4 \text{ et } \exists c/c = a+1\}$

$\Rightarrow R_1 \times R_2 = \{(a,b)/b = a+4\}$

Puissance relative

La $k^{ième}$ puissance relative de la relation R est la relation notée R^k telle que $R^k = R \times R \times ... \times R$ (k fois)

Exemple 79 $A = Z$, $R = \{(a,b)/b = a+1\}$

$R^k = \{(a,b)/b = a+k\}$

Fermeture transitive

Soit R une relation binaire sur A. La fermeture transitive de R est la relation $R^* = R \cup R^2 \cup ... \cup R^k$

3.3.2 Propriétés des relations

Soit R une relation sur A

– R est réflexive si $\forall a \in A$, $(a, a) \in R$.
Ceci est équivalent à $I \subset R$

Exemple 80 *Soit l'ensemble des entiers naturels non nuls et R une relation binaire / $(a, b) \in R$ ssi b est divisible par a.*
R est réflexive car a est divisible par a.
La relation "$>$" n'est pas réflexive.

– R est symétrique si $(a, b) \in R$ implique $(b, a) \in R$
Ceci est équivalent à $R^{-1} \subseteq R$

Exemple 81 *Soit A l'ensemble des étudiants et R une relation binaire / $(a, b) \in R$ ssi b est dans la même classe que a.*
R est symétrique car si b est dans la même classe que a alors a est dans la même classe que b.

– R est antisymétrique si $(a, b) \in R$ alors $(b, a) \notin R$
Ceci est équivalent à $R \cap R^{-1} \subseteq I$

Exemple 82 *La relation "$\geq$" est antisymétrique. En effet, si $a > b$ alors $b \ngeq a$.*

– R est asymétrique si $(a, b) \in R$ alors $(b, a) \notin R$ et $(a, a) \notin R$.
Ceci est équivalent à $R \cap R^{-1} = \emptyset$

Exemple 83 *La relation "$>$" est antisymétrique. En effet, si $a > b$ alors $b \not> a$ et $a \not> a$*

– R est transitive si $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$ alors $(a, c) \in R$.
Ceci est équivalent à $R \times R \subseteq R$

Exemple 84 *Soit l'ensemble des entiers naturels et R une relation binaire/ $(a, b) \in R$ ssi $a \leq b$*
Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$

3.4 Relation d'équivalence et partition

3.4.1 Relations d'équivalence

Une relation R est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 85 *Soit A l'ensemble des étudiants et R une relation binaire telle que $(a, b) \in R$ ssi a et b sont dans la même classe.*

- *R est réflexive puisque $(a, a) \in R$: chaque étudiant est dans la même classe que lui même.*
- *R est symétrique puisque si b est dans la même classe que a alors a est dans la même classe que b.*
- *R est transitive : si b est dans la même classe que a et c est dans la même classe que b alors c est dans la même classe que a.*

Exemple 86 *La relation "parallèle à " est une relation d'équivalence.*

Exemple 87 *La relation "$\subset$ " n'est pas une relation d'équivalence*

3.4.2 Partition

Soit A un ensemble , une partition de A est une division de A en sous ensembles $A_1, A_2, ...A_k$ tels que

- $A_1, A_2, ...A_k = A$
  - $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i \neq j$
  - $A_i \neq \emptyset \; \forall i = 1, ..., k$

Exemple 88 $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

Une partition de A est $\{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}, \{g\}\}$.

On note aussi la partition de A par $\{\overline{ab}, \overline{cde}, \overline{f}, \overline{g}\}$.

Les sous ensembles $A_1, A_2, ...A_k$ sont appelés les *parties de la partition.*

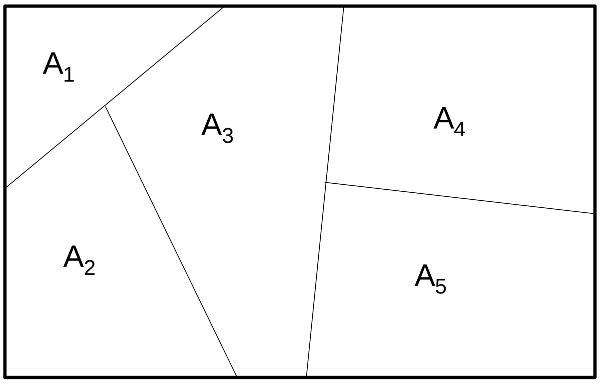


Figure 3.2:

3.4.3 Relation d'équivalence et partition

Dans cette section, on cherche à exprimer le lien entre partition et relation d'équivalence.

A partir d'une relation d'équivalence sur l'ensemble A, on peut définir une partition de A de la façon suivante : deux éléments reliés appartiennent à une même partie et deux éléments non reliés appartiennent à deux parties différentes. On dit donc que cette partition est induite de la relation d'équivalence et les parties de la partition sont appelés les *classes d'équivalence.*

On peut aussi définir une relation d'équivalence sur l'ensemble A à partir d'une partition de A : deux éléments d'une même partie sont reliés et deux éléments de deux parties distinctes ne le sont pas.

Exemple 89 *Soit A un groupe de personnes et R une relation / $(a, b) \in R$ ssi a et b portent le même nom de famille.*

R est une relation d'équivalence qui induit une partition où chaque partie correspond à une famille.

Soient $\Pi_1$et Π_2 deux partitions d'un ensemble A et R_1, R_2 les relations d'équivalence correspondantes. $\Pi_1$est plus fine que Π_2 si $R_1 \subseteq R_2$.

Exercise 90 *Vérifier que $R_1 \cap R_2$ est une relation d'équivalence ?*

Le produit de $\Pi_1$et Π_2, noté Π_1. Π_2, est une partition relatif à la relation d'équivalence $R_1 \cap R_2$. Autrement dit le produit de $\Pi_1$et Π_2 est une partition de A tels que deux éléments a et b sont dans la même partie de $\Pi_1.\ \Pi_2$ si a et b sont dans la même partie de $\Pi_1$et dans la même partie de Π_2.

La somme de $\Pi_1$et Π_2 notée Π_1+ Π_2 est une partition de la relation d'équivalence $R_1 \cup R_2$. Autrement dit, la somme de $\Pi_1$et Π_2 est une partition de A tels que deux éléments a et b sont dans la même partie de Π_1+ Π_2 s'il existe des éléments $c_1, c_2, ..., c_k$ tels que a et c_1 sont dans la même partie de $\Pi_1$ou de Π_2 , c_1 et c_2 sont dans la même partie de $\Pi_1$ou de Π_2 , c_2 et c_3 sont dans la même partie de $\Pi_1$ou de Π_2 , ..., c_k et b sont dans la même partie de $\Pi_1$ou de Π_2.

Exemple 91 *Soit* $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$

Soient $\Pi_1 = \{\{a, b, c, d\}, \{e, f, g\}, \{h, i\}, \{j, k\}\}$ *et* $\Pi_2 = \{\{a, b, c, h\}, \{d, i\}, \{e, f, j, k\}, \{g\}\}$ *deux partitions de A.*

$\Pi_1.\Pi_2 = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e, f\}, \{g\}, \{h\}, \{i\}, \{j, k\}\}$

$\Pi_1 + \Pi_2 = \{\{a, b, c, d, h, i\}, \{e, f, g, j, k\}\}$

Exemple 92 *Soit A un ensemble des personnes ,* Π_1 *une partition de A selon l'âge et* Π_2 *une partition de A selon la taille. Supposons qu'on veut identifier une personne p de A en spécifiant le groupe dont il fait partie.*

- *Si on veut classer p selon l'âge, on s'intéresseinterresse aux parties de la partition* Π_1
- *Si on veut classer p selon la taille, on s'intéresseinterresse aux parties de la partition* Π_2
- *Si on veut classer p selon l'âge et la taille, on s'intéresseinterresse aux parties de la partition* $\Pi_1.\ \Pi_2$
- *Si on veut classer p selon l'âge ou la taille, on s'intéresseinterresse aux parties de la partition* $\Pi_1 + \Pi_2$

Le produit $\Pi_1.\ \Pi_2$ représente une information totale pour identifier un objet si on a une information sur $\Pi_1$et sur Π_2.

La somme Π_1+ Π_2 présente une ambiguïté pour identifier un objet si on a uniquement une information sur l'une des partitions $\Pi_1$ou Π_2.

3.5 Relation d'ordre partiel et treillis

3.5.1 relation d'ordre

définition

Une relation binaire R sur un ensemble A est une relation d'ordre partielle si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Un ensemble A associé à une relation d'ordre partiel est dit ensemble partiellement ordonné.

Exemple 93 *Soit A l'ensemble des entiers naturels positifs et R une relation binaire $/(a,b) \in R$ ssi b est divisible par a*
- *R est réflexive : a est divisible par a.*
- *R est antisymétrique : si b est divisible par a alors a n'est pas divisible par b.*
- *R est transitive : si b est divisible par a et c est divisible par b alors c est divisible par a.*

L'ordre est dit partiel car quelques éléments de A peuvent ne pas être reliée par la relation R.

Notation

On note une relation d'ordre partiel par "$\leq$". $a \leq b$ se lit a précède b.

La relation inverse "$\geq$ " ($a \geq b$: a succède b) est également une relation d'ordre partiel.

On note $(A, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné.

Représentation d'une relation d'ordre partiel

On a vu que pour représenter une relation binaire, il y a la méthode des tableaux et la méthode des diagrammes. Une autre représentation c'est de représenter les éléments de l'ensemble par des points et de relier par des flèches deux éléments a et b chaque fois que b est lié à a par la relation R.

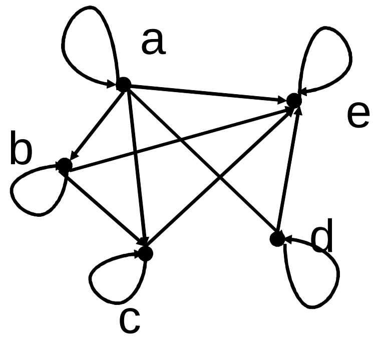


Figure 3.3:

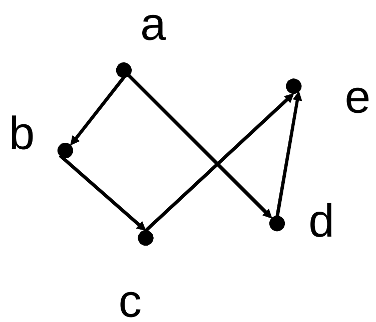


Figure 3.4:

	a	b	c	d	e
a	×	×	×	×	×
b		×	×		×
c			×		×
d				×	×
e					×

Si la relation binaire est une relation d'ordre partiel, on peut simplifier la représentation :

- puisque la relation est réflexive, on enlève les boucles
  - puisque la relation est transitive, on enlève les arcs de transition

Une représentation plus simple de l'exemple précédent est la suivante

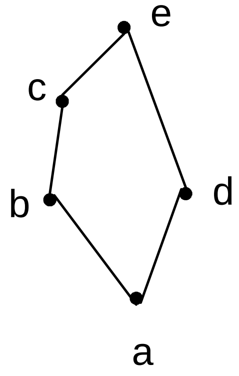


Figure 3.5:

Si dans une représentation tout les flèches vont dans une seule direction alors on peut enlever l'orientation des flèches de direction et prendre comme référence que l'orientation des flèches est vers le haut :

Cette présentation est connue par le nom de diagramme de Hasse.

Exemple 94 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$

$R = \{(a, b)/(a, b) \in R$ ssi a divise $b\}$

Elément maximal et élément minimal

Soit $(A, \leq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre partiel.

Un élément a de A est un élément maximal si $\nexists\ b \in A,\ a \neq b\ /\ a \leq b$. Autrement dit a est maximal si aucun élément ne lui succède.

Un élément a de A est un élément minimal si $\nexists\ b \in A,\ a \neq b\ /\ b \leq a$. autrement dit a est minimal si aucun élément ne le précède.

Borne supérieure et borne inférieure

Soient $(A, \leq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre partiel et a et b deux éléments de A.

> **Exemple 95** Un élément c est une borne supérieure de a et b si $a \leq c$ et $b \leq c$.

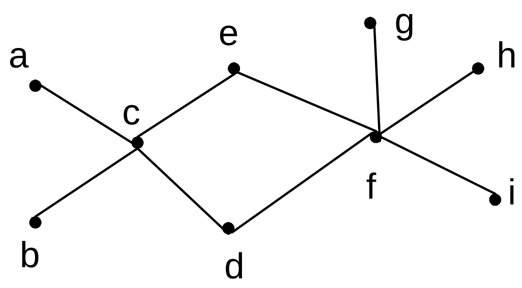


Figure 3.6:

Autrement dit c est une borne supérieure de a et b si c succède a et b.

1. c est la plus petite borne supérieure de a et b si :
   - c est une borne supérieure de a et b
   - il n'existe aucune autre borne supérieure d de a et b telle que $d \leq c$
2. Un élément c est une borne inférieure de a et b si $c \leq a$ et $c \leq b$.

Autrement dit c est une borne inférieure si c précède a et b.

1. c est la plus grande borne inférieure de a et b si :
   - c est une borne inférieure de a et b
   - il n'existe aucune autre borne inférieure d de a et b telle que $c \leq d$

Exemple 96 *Soit $A = IN$ et R la relation "devise"*

1. *C'est quoi une borne supérieure de a et b?*
2. *C'est quoi une borne inférieure de a et b?*
3. *C'est quoi la plus petite borne supérieure de a et b?*
4. *C'est quoi la plus grande borne inférieure de a et b?*

Exemple 97 *Soit S un ensemble fini, $A = P(S)$ et R la relation "inclus dans"*

1. *C'est quoi une borne supérieure de E et F?*
2. *C'est quoi une borne inférieure de E et F?*
3. *C'est quoi la plus petite borne supérieure de E et F?*
4. *C'est quoi la plus grande borne inférieure de E et F?*

3.5.2 Chaîne et antichaîne

Soit $(A, \leq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre.

Chaîne

Un sous ensemble S de A est une chaîne ssi chaque deux éléments de S sont reliés. Le nombre d'éléments d'une chaîne représente la longueur de la chaîne.

Exemple 98 $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$
$R = \{(a, b)/\ a + b$ *est paire*$\}$
$S = \{2, 4, 6, 8\}$ *est une chaîne.*

Antichaîne

Un sous ensemble Q de A est une antichaîne s'il n'existe pas de relation entre deux éléments distincts de Q.

Exemple 99 $A = \{2, 5, 13, 37\}$
$R = \{(a, b)/\ b$ *est multiple de* $a\}$
A *est une antichaîne.*

Exemple 100 *Soit A l'ensemble des cours semestriel donnés pour obtenir un diplôme en informatique de gestion et R la relation "prérequis". Si la plus grande chaîne est de longeur m, il faut donc un minimum de m semestres pour prendre le diplôme. Si la plus grande antichaine mesure d alors au maximum on peut prendre d modules par semestre.*

Remarque 101 *Une relation d'ordre partiel sur un ensemble sur un ensemble A est une relation d'ordre totale si A est une chaîne.*

Theoréme 102 *Soit $(A, \leq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre. Supposons que la longueur de la chaîne la plus longue de A est n. Alors les éléments de A peuvent être partitionnés en n antichaînes distinctes.*
Démonstration *(par induction mathématique)*

base d'induction : pour $n = 1$, il n'y a pas deux éléments de A qui sont reliés, donc il y a une antichaîne.
étape d'induction : supposons vraie pour $n - 1$

Supposons que la longueur de la chaîne la plus longue de A est n. Soit M l'ensemble des élément maximaux de A. On peu être sur que M est une antichaîne non vide.

Considérons maintenant l'ensemble partiellement ordonné $(A \setminus M, \leq)$. Comme il n'existe aucune chaîne de longueur n dans $A \setminus M$, la chaîne la plus longue est de longueur maximale $n-1$. D'autre part si la longueur de la chaîne la plus longue de $A \setminus M$ est inférieur à $n-1$ alors M contient nécessairement deux (ou plus) éléments qui sont dans la même chaîne ce qui est impossible.

D'où la longueur de la chaîne la plus longue de $A \setminus M$ est $n-1$ et par la suite $A \setminus M$ peut être partitionné en $n-1$ antichaînes. On conclue ainsi que A peut être partitionné en n antichaines

Theoréme 103 *Let $(A, \leq)$ un ensemble de $mn+1$ éléments muni d'une relation d'ordre. On a alors soit une antichaîne de $m+1$ éléments soit une chaîne de $n+1$ éléments.*

Démonstration

Supposons que la longueur de la chaîne la plus longue de A est n. D'après le théorème, on peut partitionner A en n antichaînes distinctes. Si chaque antichaîne est constituée au maximum de m éléments alors le nombre total maximal d'éléments de A est nm, ce qui contredit le fait que par hypothèse l'ensemble A est formé de $nm+1$ éléments.

Treillis

Un treillis (lattice) est un ensemble partiellement ordonné $(A, \leq)$ telle que toute paire (a, b) de A admet une plus petite borne supérieure unique et une plus grande inférieure unique.

Exemple 104 1. *$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ et R la relation "devise"*

2. *$A = P(\{a, b, c, \})$ et R la relation "inclus"*

Soient (A, R_1) et (B, R_2) deux ensembles partiellement ordonnés.

Soit R_3 une relation binaire de $A \times B$ tel que pour $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $b_1 \in B$ et $b_2 \in B$, $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in R_3$ ssi $(a_1, a_2) \in R_1$ et $(b_1, b_2) \in R_2$.

Exercise 105 *Montrer que R_3 est une relation d'ordre.*

$(A \times B, R_3)$ est un ensemble partiellement ordonné qui représente le produit cartésien de (A, R_1) et (B, R_2).

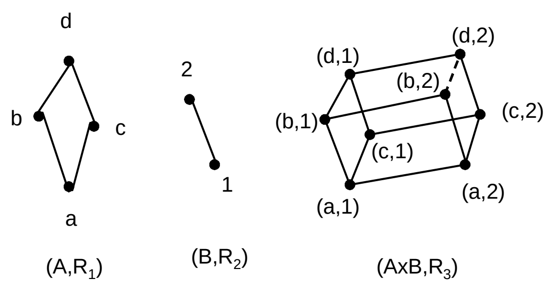


Figure 3.7:

3.6 Fonctions

3.6.1 Définition

Une relation binaire R de A à B est une fonction si une de ces conditions est vérifiées

Exemple 106 si un élément de A est en relation avec un élément de B alors cet élément de B est unique.

- $\forall\ a \in dom(R)$, $a.R$ est un singleton
- si $\begin{cases} (a,b) \in R \\ (a,b') \in R \end{cases}$ alors $b = b'$
- $R^{-1} \times R \subseteq I$

On note par $R(a) = b$ le fait que $(a,b) \in R$ et on lit b est l'image de a par R ou que a est l'antécédentantécédant de b par R.

Associer une fonction de A à B revient à transformer A en B.

Exemple 107 *A : ensemble des états, B : ensemble des capitales*
Ainsi R(Tunisie)= Tunis, R(France) = Paris

Exemple 108 *1/ Donner une fonction qui transforme une ligne droite à une cercle.*
2/ Donner une fonction qui transforme un espace à un point.

Soit f une fonction sur A tels que $dom(f) = A$. On appelle noyau de$f$ la relation $f \times f^{-1}$. On a

$$\begin{aligned} f \times f^{-1} &= \left\{(s,s') \diagup \exists x :\ (s,x) \in f \text{ et } (x,s') \in f^{-1}\right\} \\ &= \left\{(s,s') \diagup \exists x :\ (s,x) \in f \text{ et } (s',x) \in f\right\} \\ & \left\{(s,s') \diagup f(s) = f(s')\right\} \end{aligned}$$

Exercise 109 *Montrer que la relation $f \times f^{-1}$ est une relation d'équivalence*

3.6.2 Injection et surjection

Une fonction f de A à B est *injective* si chaque élément du $codom(f)$ est relié a un seul élément du $dom(f)$:

$$\forall x, y \in dom(f),\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Exemple 110 *Soit $A = \{0, 1, 2, 3\}$ Parmi ces fonctions sur A quelles sont celles qui sont injectives :*

1. $\{(1, 2), (2, 3)\}$
2. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$
3. $\emptyset$

Une fonction f de A à B est *surjective* si chaque élément de B admet un antécédent dans A :

$$codom(f) = B$$

Exemple 111 *Soient $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$ Parmi ces fonctions de A à B quelles sont celles qui sont surjectives :*

1. $\{(1, 2), (2, 3), (1, 4)\}$
2. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$
3. $\emptyset$

Une fonction f de A à B est *bijective* si elle est injective et surjective

3.6.3 Principe des boites de pigeons

Soient D et R deux ensembles finis, si $|D| > |R|$ alors pour toute fonction f de D dans R, tel que $dom(f) = D$, $\exists\ d_1,\ d_2 \in D$ tel que $f(d_1) = f(d_2)$. Cette remarque est connue sous le nom du principe des boites de pigeons.

Exemple 112 *Parmi 13 personnes, il y au moins 2 qui sont nés le même mois.*

Exemple 113 *Si on a 10 paires de chaussures et on sélection 11 chaussures, on est sûr d'avoir au moins une bonne paire.*

Exemple 114 *Montrons que dans un groupe de six personnes il y a soit trois qui sont mutuellement amis soit trois qui ne se connaissent pas.*

Soit A une personne de ce groupe. D'après le principe de boites de piégeons il y a trois (ou plus) personnes qui sont amis avec A ou trois (ou plus) qui ne le connaissent pas.

Soient B, C et D les amis de A. Si deux d'entre eux se connaissent donc elles forment avec A un groupe de trois amis. Si B, C et D sont deux à deux étrangers l'un de l'autre, alors on a un groupe de trois qui ne se connaissent pas.

Exemple 115 *Montrons que dans une séquence de m nombres consécutifs, on a au moins un nombre qui est divisible par m.*

On a une séquence de m nombres consécutifs donc le reste de la division de ces nombre varie de 0 à $m-1$.

Supposons que le reste 0 n'existe pas donc on aura m nombres et $m-1$ restes, $|m| > |m-1|$. Selon le principe de boites de pigeons, on aura 2 piégeons dans la même boite. Ce qui est impossible.

Chapter 4

Les fonctions numérique discrètes et les fonctions génératrice

4.1 Introduction

Une fonction est une relation binaire qui à chaque élément de son domaine associe une et unique image dans son ensemble d'arrivée.

Dans ce qui suit, on s'intéresse aux fonctions qui ont pour domaine l'ensemble des entiers positif IN. Ces fonctions sont dites fonctions numérique discrète ou simplement fonctions numérique. On noteras tout le long du chapitre les fonctions numérique par des lettres en minuscules (exp. a) et les valeurs respectives $a(0)$, $a(1)$, $a(2)$, ..., $a(r)$, ... par a_0, a_1, a_2, ...,a_r, ...

Exemple 116 *Supposons qu'on dépose la somme de 100DT dans un compte en banque qui rapporte annuellement avec un taux de 7%. On peut caractériser le montant de notre argent dans ce compte par une fonction numérique a, où a_r représente l'état de notre solde à la fin de la rème année. Ainsi*

$$a_r = 100 * (1,07)^r$$

Exemple 117 *Notons par a_r l'altitude (en mille pieds) d'un avion en vol pendant 130 min de l'aéroport Tunis Carthage a l'aéroport de Orly (Paris). Au départ du vol l'avion prend 10mn avant d'arriver au point de décollage..*

Elle découle avec une vitesse uniforme pour atteindre après 10 mn une altitude de 30000 pieds au dessus de la terre. Elle conserve cette altitude pendant 110mn. Aussitôt après, elle commence l'atterrissage avec une vitesse uniforme pour atteindre le sol en 10mn. La fonction a qui donne l'altitude de l'avion (en mille pied) pendant le vol Tunis-Paris est

$$a_r = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq r < 10 \\ 3\,(r-10) & si\ 10 \leq r < 20 \\ 30 & si\ 20 \leq r < 120 \\ 3(130-r) & si\ 120 \leq r < 130 \\ 0 & si\ r \geq 130 \end{cases}$$

4.2 Manipulation des fonctions numériques

- **Addition :** $c = a + b$ si et seulement si $\forall\ r \in IN$, $c_r = a_r + b_r$
- **Multiplication :** $c = a\ b$ si et seulement si $\forall\ r \in IN$, $c_r = a_r\ b_r$

Exemple 118 *Soit* $a_r = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq r \leq 2 \\ 2^{-r} + 5 & si\ r \geq 3 \end{cases}$ *et* $b_r = \begin{cases} 3 - 2^r & si\ 0 \leq r \leq 1 \\ r + 5 & si\ r \geq 2 \end{cases}$ *. On a*

$$a_r + b_r = \begin{cases} 3 - 2^r & si\ 0 \leq r \leq 1 \\ 4 & si\ r = 2 \\ 2^{-r} + r + 7 & si\ r \geq 3 \end{cases}$$

$$a_r\ b_r = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq r \leq 2 \\ r2^{-r} + 2^{-r+1} + 5r + 10 & si\ r \geq 3 \end{cases}$$

- **Multiplication par un scalaire :** Soit $\alpha \in IR$, $c = \alpha\ a$ si et seulement si $\forall\ r \in IN$, $c_r = \alpha\ a_r$
- **Valeur absolue :** $c = |a|$ si et seulement si $\forall\ r \in IN$, $c_r = |a_r|$

Exemple 119 *Si* $a_r = (-1)^r \left(\frac{2}{r^2}\right)$, $r \geq 1$ *alors* $c = |a|$ *est définie par* $c_r = \left(\frac{2}{r^2}\right)$, $r \geq 1$

- Soit a une fonction numérique et $i \in IN$. On note par $S^i a$ la fonction numérique qui prend la valeur 0 pour ces i premier termes et a_{r-i} pour le $r$ième termes $r \geq i$.

Exemple 120 *1. Si* $a_r = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq r \leq 10 \\ 2 & si\ r \geq 11 \end{cases}$ *alors* $c = S^5 a$ *est définie par* $c_r = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq r \leq 4 \\ 1 & si\ 5 \leq r \leq 15 \\ 2 & si\ r \geq 16 \end{cases}$.

2. Soit $a_r = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq r < 10 \\ 3\,(r-10) & si\ 10 \leq r < 20 \\ 30 & si\ 20 \leq r < 120 \\ 3(130-r) & si\ 120 \leq r < 130 \\ 0 & si\ r \geq 130 \end{cases}$ *la fonction numérique qui désigne l'altitude de l'avion au cours du vol. Si l'avion subie un retard de* $10mn$ *alors l'altitude de l'avion est décrite par la fonction numérique* $c = S^{10}a$ *définie par* $a_r = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq r < 20 \\ 3\,(r-10) & si\ 20 \leq r < 30 \\ 30 & si\ 30 \leq r < 130 \\ 3(130-r) & si\ 130 \leq r < 140 \\ 0 & si\ r \geq 140 \end{cases}$.

– Soit a une fonction numérique et $i \in IN$. On note par $S^{-i}a$ la fonction numérique qui prend pour le $r$ième termes une valeur égale a_{r+i}.

Exemple 121 *1. Si* $a_r = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq r \leq 10 \\ 2 & si\ r \geq 11 \end{cases}$ *alors* $c = S^{-7}a$ *est définie par* $c_r = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq r \leq 3 \\ 2 & si\ r \geq 4 \end{cases}$. *et* $d = S^{-11}a$ *est définie par* $c_r = 2,\ r \in IN$.

– **Somme cumulé :** Soit a une fonction numérique. La somme cumulé de a est une fonction numérique c définie par $c_r = \sum\limits_{i=0}^{r} a_i,\ r \geq 0$.

Exemple 122 *Si on dépose chaque année dans le même compte bancaire la somme de 100DT. Sachant que ce compte rapporte annuellement 7%, alors la fonction numérique qui caractérise le montant du solde dans notre compte bancaire à la fin de la r ième année est*

$$c_r = \sum_{i=1}^{r} a_r = 100 * (1,07)^i$$

C'est la somme cumulé de la fonction numérique $a_r = 100 * (1,07)^r$.

- **The forward difference :** La forward difference d'une fonction numérique a, notée Δa, dont le rième terme est définie par $a_{r+1} - a_r$.
- **The backward difference :** Le backward difference d'une fonction numérique a, notée ∇a, dont le premier terme est égale à 0 et le rième terme est définie par $a_r - a_{r-1}$.

Exemple 123 *Soit* $a_r = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq r \leq 2 \\ 2^{-r} + 5 & si\ r \geq 3 \end{cases}$. *Si on note par* $b = \Delta a$ *et* $c = \nabla a$ *alors*

$$b_r = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq r \leq 1 \\ \frac{41}{8} & si\ r = 2 \\ 2^{-r+1} & si\ r \geq 3 \end{cases}$$

$$c_r = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq r \leq 2 \\ \frac{41}{8} & si\ r = 3 \\ 2^{-r} & si\ r \geq 4 \end{cases}$$

Exercise 124 *Vérifier que* $S^{-1}(\nabla a) = \Delta a$.

- **La convolution :** La convolution c de a et b, notée $a * b$, est une fonction numérique définie par :

$$\begin{aligned} c_r &= a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + ... + a_i b_{r-i} + ... + a_{r-1} b_1 + a_r b_0 \\ &= \sum_{i=0}^{r} a_i b_{r-i} \end{aligned}$$

Exemple 125 *Si* $a_r = 3^r$, $r \geq 0$ *et* $b_r = 2^r$, $r \geq 0$ *alors* $c = a * b$ *est définie par*

$$c_r = \sum_{i=0}^{r} 3^i 2^{r-i}, \ r \geq 0$$

Exemple 126 *Revenons à l'exemple de dépôt d'argent d'un compte en banque avec un taux d'intérêt annuelle de 7%. Supposons qu'au lieu de déposer annuellement un montant de 100DT, on va augmenter chaque année le montant à déposer de 10DT. La fonction numérique qui caractérise le montant à déposer annuellement au début de chaque année est :*

$$a_r = 100\,(1 + 0,1\ r)\,, \ r \geq 0$$

Soit b la fonction numérique qui décrit l'état d'un compte en banque si on a déposer au début de la première année 1DT. On a

$$b_r = (1,07)^r \ , \ r \geq 0$$

A la rième année, la somme a_0 déposer au début de la première année apporte une contribution de $a_0 b_r DT$, la somme a_1 déposer à la fin de la première année apporte une contribution de $a_1 b_{r-1} DT$, ..., la somme a_i déposer à la fin de la ième année apporte une contribution de $a_i b_{r-i} DT$,..., la somme a_r déposer à la fin de la première année apporte une contribution de $a_r = a_r b_0 DT$. Le totale du montant en compte en banque peut être décrit par une fonction numérique c définie par

$$c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + ... + a_i b_{r-i} + ... + a_{r-1} b_1 + a_r b_0$$

Ainsi $c = a * b$.

4.3 Le comportement asymptotique des fonctions numériques :

Soit a et b deux fonctions numérique qui caractérises le prix annuelle respectifs de deux terrains A et B. Choisir d'investir dans l'achat du terrain A ou B dépendras certainement de leurs prix après un certains nombre d'année. Si l'investissement est à long terme on a ainsi besoin de savoir le comportement des deux fonctions a et b à l'infini (ou pour une grande valeur de r). Le but de cette section est d'étudier le comportement asymptotique (a l'infini) des fonctions numérique.

On dit qu'une fonction numérique a domine asymptotiquement b (ou b est asymptotiquement dominée par a), si et seulement si, il existe $k \geq 0$ et $m \geq 0$ tel que

$$|b_r| \leq m \ a_r, \ \forall \ r \geq k$$

Exemple 127 *Soit A et B deux comptes en banque. Les comptes A et B rapportent annuellement à chacun pour le placement de 1DT au début de la première année la somme respectives de $a_r = 1 + 0,2r$ et $b_r = (1 + 0,03)^{4r}$. On a*

$$|1 + 0,2r| \leq (1 + 0,03)^{4r} \ , \ r \geq 9$$

Ainsi, pour un investissement à long terme il est plus intéressent de déposer son argent dans un compte de type B.

Proposition 128 *:*

1. *Pour toute fonction numérique a,* $|a|$ *domine asymptotiquement a.*
2. *Si a domine asymptotiquement b alors* $\forall\ \alpha \in IR$*, a domine asymptotiquement* αb*.*
3. *Si a domine asymptotiquement b alors* $\forall\ i \in IN$*,* $S^i a$ *domine asymptotiquement* $S^i b$*.*
4. *Si a domine asymptotiquement b et c alors* $\forall\ (\alpha, \beta) \in IR^2$*, a domine asymptotiquement* $\alpha b + \beta c$*.*
5. *Si a domine asymptotiquement b et b domine asymptotiquement c alors a domine asymptotiquement c.*
6. *Il est possible que a domine asymptotiquement b et b domine asymptotiquement a. (exp.* $a_r = r^2$ *et* $b_r = \frac{r^é}{1000}$*)*
7. *Il est possible que a ne domine pas asymptotiquement b et b ne domine pas asymptotiquement a. (exp.* $a_r = \begin{cases} 1 \ \textit{si } r \ \textit{est pair} \\ 0 \ \textit{si } r \ \textit{est impair} \end{cases}$ *et* $b_r = \begin{cases} 0 \ \textit{si } r \ \textit{est pair} \\ 1 \ \textit{si } r \ \textit{est impair} \end{cases}$*)*

Soit a une fonction numérique. On note par $O(a)$ (big-oh) l'ensemble des fonctions numériques qui sont asymptotiquement dominées par a.

Exemple 129 *Etant donné les fonctions numériques suivantes :*

$$\begin{aligned} a_r &= r^2 \\ b_r &= 10r^2 + 25 \\ c_r &= 5 - r \\ d_r &= \frac{1}{2} r^2 \log r - r^2 \end{aligned}$$

alors on a $b \in O(a)$*,* $c \in O(a)$*,* $d \notin O(a)$*,* $a \in O(d)$*,* $b \in O(d)$*,* $c \in O(d)$*.*

Proposition 130 *On a*

$$O(1) \subseteq O(\log r) \subseteq O(r^\alpha) \subseteq O(\alpha^r) \subseteq O\left(r!\right)$$

Remarque 131 *Si on a* $b \in O\left(2^r\right)$ *alors on peut rien dire sur le comportement de b à l'infini que simplement la valeur de b en valeur absolue est comprise entre* 2^r *et* -2^r*. Ceci ne veut pas dire forcement que b croit avec la même vitesse que la fonction* (2^r)*.*

Proposition 132 *:*

1. *Pour toute fonction numérique a,* $a \in O(|a|)$.
2. *Si* $b \in O(a)$ *alors* $\forall\ \alpha \in IR$, $\alpha b \in O(a)$.
3. *Si* $b \in O(a)$ *alors* $\forall\ i \in IN$, $S^i b \in O(S^i a)$.
4. *Si* $b \in O(a)$ *et* $c \in O(a)$ *alors* $\forall\ (\alpha,\beta) \in IR^2$, $\alpha b + \beta c \in O(a)$.
5. *Si* $b \in O(a)$ *et* $c \in O(b)$ *alors* $c \in O(a)$.
6. *Il est possible que* $b \in O(a)$ *et* $a \in O(b)$.
7. *Il est possible que* $b \notin O(a)$ *et* $a \notin O(b)$.

On noteras à la place de $b \in O(a)$, $b = O(a)$. Ainsi si $a_r = \frac{1}{3}r^3 + 2r^2 + 3$, alors on a :

$$\begin{aligned} a &= O\left(r^3\right) \\ a &= \frac{1}{3}r^3 + O\left(r^2\right) \\ a &= \frac{1}{3}r^3 + 2r^2 + O(1) \end{aligned}$$

4.4 Les fonctions génératrices

Revenons au problème de manipulation des fonctions numériques. Le calcul d'opération tel que la convolution ou même un calcul de somme peut présenter quelques difficultés.. L'idée d'utiliser a un autre outil (qui n'est pas forcement plus simple dans tout les cas) rend parfois ce calcul plus facile. Ainsi pour les ordinateurs qui savent que calculer en binaire, l'opérations simple 7+5 seras exécuter de la manière suivante : Réécrire les chiffres 5 et 7 en binaire. Ce qui donne respectivement 101 et 111. L'opération somme en décimale correspond a l'opération somme en binaire. Ce qui donne le chiffre 1100. Traduit en décimale donne 12.

Nous allons introduire la notion de fonction génératrice pour faciliter les opérations sur les fonctions numériques.

Soit a une fonction numérique. On note par A (en majuscule) la fonction génératrice de a définie par le polynôme suivant :

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_r z^r + ...$$

Exemple 133 *La fonction génératrice de la fonction numérique* $a_r = 3^r$, $r \geq 0$, *est*

$$\begin{aligned} A(z) &= 3^0 + 3^1 z + 3^2 z^2 + 3^3 z^3 + ... + 3^r z^r + ... \\ &= \frac{1}{1-3z} \end{aligned}$$

Dans ce qui suit on va essayer de faire une correspondance entre les opérations sur les fonctions numérique et les opérations sur leurs fonctions génératrices correspondantes. (La vérification de ces résultats est à titre d'exercice)

– $\forall\ \alpha \in IR$, $b = \alpha a$ si et seulement si $B(z) = \alpha A(z)$

Exemple 134 *Si* $a_r = 7 \times 3^r$ *alors* $A(z) = \frac{7}{1-3z}$ *et réciproquement..*

Si $a_r = 3^{r+2}$ *alors* $A(z) = \frac{9}{1-3z}$ *et réciproquement..*

– $c = a + b$ si et seulement si $C(z) = A(z) + B(z)$

Exemple 135 *Si* $a_r = 2^r + 3^r + 1 = 2^r + 3^r + 1^r$ *alors* $A(z) = \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{1-3z} + \frac{1}{1-z}$ *et réciproquement..*

Si $A(z) = \frac{2+3z-6z^2}{1-2z} = 3z + \frac{2}{1-2z}$ *alors* $a_r = \begin{cases} 2 & si\ r = 0 \\ 7 & si\ r = 1 \\ 2^{r+1} & si\ r \geq 2 \end{cases}$

Si $A(z) = \frac{2}{1-4z^2} = \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{1+2z}$ *alors* $a_r = 2^r + (-2)^r = \begin{cases} 0 & si\ r\ est\ pair \\ 2^{r+1} & si\ r\ est\ impair \end{cases}$

– $b_r = \alpha^r a_r$, $r \geq 0$, si et seulement si, $B(z) = A(\alpha z)$

Exemple 136 *Si* $b = \alpha^r = \alpha^r \times 1$ *alors* $B(z) = A(\alpha z) = \frac{1}{1-\alpha z}$ *(avec* $A(z) = \frac{1}{1-z}$*).*

– $b = S^i a$, si et seulement si, $B(z) = z^i A(z)$

Exemple 137 *Si* $A(z) = \frac{z^4}{1-2z}$ *alors* $a_r = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq r \leq 3 \\ 2^{r-4} & si\ r \geq 4 \end{cases}$

– $b = S^{-i} a$, si et seulement si, $B(z) = z^{-i} \left[A(z) - a_0 - a_1 z - ... - a_{i-1} z^{i-1} \right]$

Exemple 138 *Si* $a_r = 3^r$ *et* $b_r = 3^{r+2}$ *alors* $b = S^{-2}a$. *Ainsi,*

$$\begin{aligned} B(z) &= z^{-2}\left[A(z) - a_0 - a_1 z\right] \\ &= z^{-2}\left[\frac{1}{1-3z} - 1 - 3z\right] \\ &= \frac{9}{1-3z} \end{aligned}$$

- $b = \Delta a$, si et seulement si, $B(z) = \frac{1}{z}\left[A(z) - a_0\right] - A(z)$
- $b = \nabla a$, si et seulement si, $B(z) = A(z) - zA(z)$
- $c = a * b$, si et seulement si, $C(z) = A(z)\ B(z)$

Exemple 139 *Soit* a *et* b *deux fonctions numériques définie par*

$$\begin{aligned} a_r &= 3^r \\ b_r &= 2^r \end{aligned}$$

Si $c = a * b$ *alors* $C(z) = \frac{1}{1-3z} \times \frac{1}{1\_2z} = \frac{3}{1-3z} - \frac{1}{1-2z}$. *Ainsi la fonction numérique* c *est définie par*

$$c_r = 3\left(3^r\right) - 2\left(2\right)^r = 3^{r+1} - 2^{r+1}$$

Exemple 140 *Soit* a *une fonction numérique et* b *la fonction numérique définie par* $b_r = 1$. *Si on définie par* c *la convolution de* a *et* b *alors* $c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + ... + a_i b_{r-i} + ... + a_{r-1} b_1 + a_r b_0 = \sum_{i=0}^{r} a_i$. *Ainsi* c *est la somme cumulé de* a *et sa fonction génératrice est* $C(z) = A(z)\ B(z) = \frac{1}{1-z}\ A(z)$.

Exemple 141 *On veut évaluer la somme* $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + r^2$.

Si on note par a *la fonction numérique définie par* $a_r = r^2$ *alors on veut déterminer la valeur de la fonction somme cumulé* c *définie par*

$$c_r = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + r^2$$

Essayons de déterminer la fonction génératrice de la fonction numérique a.

On a

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^r + ...$$

On dérivons on obtient

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + ... + r\ z^{r-1} + (r+1)z^r + ...$$

Multiplions toute l'expression par z, on a

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + ... + r\ z^r + (r+1)z^{r+1} + ...$$

Si on répète les mêmes actions et on dérivons l'expressions et on multiplions à droite et à gauche par z on obtient,

$$\frac{z(1+z)}{(1-z)^3} = 0^2 + 1^2 z + 2^2 z^2 + 3^2 z^3 + 4^2 z^4 + ... + r^2\ z^r + ...$$

Ainsi la fonction génératrice de a est $A(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$. Comme la fonction numérique c est la somme cumulé de a alors

$$C(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^4} = z \times \frac{1}{(1-z)^4} + (1+z)\frac{1}{(1-z)^4}$$

D'après la formule de binôme on a pour $n < 0$

$$(1+z)^n = 1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}\ z^r$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(1+z)^{-4} &= 1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{(-4)(-4-1)(-4-2)...(-4-r+1)}{r!}\ (-z)^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{4 \times 5 \times 6 \times ... \times (r+3)}{r!}\ z^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1 \times 2 \times 3}\ z^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{+\infty} k_r\ z^r
\end{aligned}$$

avec $k_r = \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1\times2\times3}$*.Comme* c_r *est le coefficient de* z^r *dans* $C(z)$*, alors*

$$\begin{aligned} c_r &= k_{r-1} + k_{r-2} \\ &= \frac{r\,(r+1)\,(r+2)}{1\times2\times3} + \frac{(r-1)\,r\,(r+1)}{1\times2\times3} \\ &= \frac{r\,(r+1)\,(2r+1)}{6} \end{aligned}$$

4.5 Problème combinatoire

Le but de cette section est d'utiliser la notion de fonction génératrice pour démontrer la formule suivante

$$C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1)$$

Soit a la fonction numérique définie par

$$a_r = C(n, r)$$

ou $C(n, 0) = 1$ et $C(n, r) = 0$ si $r > n$. La fonction génératrice de a est

$$A(z) = C(n, 0) + C(n, 1)z + C(n, 2)z^2 + ... + C(n, n)z^n$$

On peut choisir r élément parmi n de la manière suivante : On devise les n objets sur deux sacs. Le premier sac contiendras k objets et l'autres les $n-k$ restants.. Ainsi choisir r objets parmi n est équivalent à choisir 0 objet du premier sac et r objets du second, ou 1 objet du premier sac et $r-1$ objets du second, ..., ou r objets du premier sac et rien du second. Ce qui fait que

$$C(n, r) = \sum_{i=0}^{r} C(k, i)\ C(n-k, r-i)$$

Ainsi si on note par

$$\begin{aligned} b_r &= C(k, r) \\ c_r &= C(n-k, r) \end{aligned}$$

alors $a = b * c$. Ce qui fait que $A(z) = B(z)\ C(z)$. Si on fixe $k = 1$, alors on auras $B(z) = (1+z)$, $c_r = C(n-1, r)$ et $A(z) = (1+z)C(z)$. Si on répète le même raisonnement sur la fonction numérique, on obtiendras que

$A(z) = (1+z)^2 \, E(z)$ avec $e_r = C(n-2, r)$. Ainsi de suite, ce qui nous conduit à dire que

$$A(z) = C(n,0) + C(n,1)z + C(n,2)z^2 + ... + C(n,n)z^n = (1+z)^n$$

Par ailleurs

$$(1+z)^n = (1+z)^{n-1} + z(1+z)^{n-1}$$

Le coefficient de z^r dans le membre gauche de l'expression ci-dessus est $C(n,r)$. Dans le membre à droite le coefficient de z^r est la somme de $C(n-1,r)$ et $C(n-1,r-1)$. Les deux polynômes sont égaux donc

$$C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$$

Chapter 5

Travaux Dérigés

5.1 Série 1

Exercice 1 :

1. De combien de manières deux entiers peuvent être choisis entre $1, \ldots, 100$ pour que leur difference soit exactement égale à 7 ?
2. Refaire (1) avec la différence ≤ 7 .

Solution :

1. Soient $I = \{1, ..., 100\}$, A : l'èvenement choisir deux entiers x et y dans I telque $x - y = 7 \Rightarrow A = \{(x, y) \in I^2 / x - y = 7\}$.

Pour $x = 100$ $\quad$ $y = 93$
Pour $x = 99$ $\quad$ $y = 92$
$\vdots$
Pour $x = 8$ $\quad$ $y = 1$
Pour $x = 7$ $\quad$ $y = 0 \notin I$

Ainsi il y a 93 manières de choisir deux entiers entre 1 et 100 dont la différence est égale à 7 donc $|A| = 93$.

2. Maintenant soit $A = \{(x, y) \in I^2 / x - y \leq 7\}$
$\Rightarrow A = A_0 \cup A_1 ... \cup A_i .... \cup A_7$ avec $A_i = \{(x, y) \in I^2 / x - y = i\}$, $0 \leq i \leq 7$.
Les évenements $A_0, ..., A_7$ sont indépendants. En effet, il n'existe pas $(x, y) \in I^2$ telque $x - y = i$ et $x - y = i + 1$ donc $|A| = \sum_{i=0}^{7} |A_i|$.
D'aprés 1) $|A_7| = 93$, de même $|A_{7-i}| = 93 + i$, $0 \leq i \leq 7$.

Enfin, $|A| = 100 + 99 + ... + 93 = 772$

Exercice 2 :
De combien de manières deux carrés adjacents peuvent être choisis d'un échiquier 8×8 ?

Solution :
Soit $A :=$ le nombre de manières de choisir *deux carrés* adjacents d'un échiquier 8×8
$\Rightarrow A :=$ le nombre de manières de choisir *deux cotés* adjacents d'un échiquier 8×8.
$\Rightarrow A = A_1 \cup A_2$ avec A_1 :=le nombre de manières de choisir *deux cotés* adjacents *en ligne* et A_2 :=le nombre de manières de choisir *deux cotés* adjacents *en colonne*.
A_1 et A_2 sont deux évenements indépendants car deux cotés ne peuvent pas être adjacents à la fois en ligne et en colonne donc $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
Ainsi, $|A| = |A_1| \cup |A_2| = |A_1| + |A_2|$.
Or, $|A_1| = 7 \times 8 = 56$ (Pour chaque ligne il ya 8 façons de choisir deux cotés adjacents)
Par symétrie, $|A_2| = 7 \times 8 = 56$. Enfin, $|A| = 56 + 56 = 112$

Exercice 3 :
1. Montrer que le nombre total de permutations de p boules rouges et $0,\ ou\ 1,\ ou\ 2, \ldots, ou\ q$ boules blanches est :

$$\frac{p!}{p!} + \frac{(p+1)!}{p!1!} + \frac{(p+2)!}{p!2!} + \cdots + \frac{(p+q)!}{p!q!}$$

2. Montrer que cette somme est égale à :

$$\frac{(p+q+1)!}{(p+1)!q!}$$

3. Montrer que le nombre total de permutations de $0,\ ou\ 1,\ ou\ 2, \ldots,\ ou\ p$ boules rouges avec $0,\ ou\ 1,\ ou\ 2, \ldots,\ ou\ q$ boules blanches est :

$$\frac{(p+q+2)!}{(p+1)!(q+1)!} - 1$$

Solution :
1. Soit

$$A_p := \text{permuter} p$$

boules rougeset0 ou 1 ou 2... ou q boules blanches$\Rightarrow A_p = A_0 \cup A_1 ... \cup A_k ... \cup A_q$ avec A_k est l'évenement permuter p boules rouges et k boules blanches, $0 \leq k \leq q$. Comme les évenements sont indṕendants alors $|A_p| = |A_0| + ... + |A_q|$. Or $|A_k| = \frac{(p+k)!}{p!k!}$ donc $|A_p| = \frac{p!}{p!} + \frac{(p+1)!}{p!1!} + ... + \frac{(p+q)!}{p!q!}$ d'où le résultat.

2. L'évenement A_p revient à permuter $(p+1)$ boules rouges et q boules blanches en utilisant la $(p+1)$ème boule rouge comme une sentinelle indiquant la fin de l'évenement. En effet, on obtient toujours une permutation de p boules rouges et un nombre de boules blanches qui varie entre 0 et q. Si par exemple, on place 2 boules blanches et $(p+1)$ boules rouges, L'évenement A_2 se réalise.
Ainsi, $|A_p| = \frac{(p+q+1)!}{(p+1)!q!}$.

3. Soit

$$B := \text{permuter}0$$

boules rouges et (0 ou 1 ou 2... ou q boules blanches)ou1 boule rouge et (0 ou 1 ou 2... ou q boules blanches)$ou\vdots oup$ boules rouges et (0 ou 1 ou 2... ou q boules blanches)ouD'après 1) $B = A_0 \cup A_1 \cup .... \cup A_p$ avec $A_0, ..., A_p$ sont des évenements indépendants
$\Rightarrow |B| = \sum_{i=0}^{p} |A_i| \underset{\uparrow(1)}{=} \sum_{i=0}^{p} \frac{(i+q+1)!}{(i+1)!q!}$.

Montrons que $|B| = \frac{(p+q+2)!}{(p+1)!(q+1)!} - 1$. Raisonnons par recurrence :

pour $p = 0$, $|B| = \frac{(0+q+1)!}{(0+1)!q!} = \frac{(q+1)!}{q!} = q + 1$ or $\frac{(0+q+2)!}{(0+1)!(q+1)!} - 1 = q + 1$ d'où la propriété est vraie pour $p = 0$.
Supposons que la propriété est vraie pour l'ordre p et montrons qu'elle est vraie pour l'ordre $p + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p+1} \frac{(i+q+1)!}{(i+1)!q!} &= \sum_{i=0}^{p} \frac{(i+q+1)!}{(i+1)!q!} + \frac{(p+1+q+1)!}{(p+1+1)!q!} \\
&= \frac{(p+q+2)!}{(p+1)!(q+1)!} - 1 + \frac{(p+q+2)!}{(p+2)!q!} \text{ (d'après l'hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(p+q+2)!(p+2)+(p+q+2)!(q+1)}{(p+2)!(q+1)!} - 1 \\
&= \frac{(p+q+2)![(p+2)+(q+1)]}{(p+2)!(q+1)!} - 1
\end{aligned}$$

$= \frac{(p+q+2)!(p+q+3)!}{(p+2)!(q+1)!} - 1$. D'où le résultat.

Exercice 4 :
1. De combien de manières deux entiers entre $1,\ 2, \ldots,\ 100$ peuvent être choisis pour que leur somme soit paire ? impaire ?
2. Utiliser un argument combinatoire pour montrer que :

$$C(2n, 2) = 2C(n, 2) + n^2$$

Solution :
1.
♣ Soient $I = \{1, ..., 100\}$, $A = \{(x, y) \in I^2 / x + y = 2k\}$. $B = \{(x, y) \in I^2 / x + y = 2k + 1\}$.
On sait qu'un nombre pair est la somme de deux nombres pairs ou impairs $\Rightarrow A = A_1 \cup A_2$ avec $A_1 = \{(x, y) \in I^2 / x$ et y sont deux nombres pairs$\}$ et $A_2 = \{(x, y) \in I^2 /\ x$ et y sont deux nombres impairs$\}$.
On sait que I contient 50 nombres pairs et 50 nombres impairs, A_1 et A_2 sont indépendants donc $|A| = |A_1| + |A_2| = C(50, 2) + C(50, 2) = \frac{50!}{48!} = 2450$.

♣ Soit $B = \{(x, y) \in I^2 / x + y = 2k + 1\}$. On sait qu'un nombre impair est la somme d'un nombre pair et un nombre impair
$\Rightarrow |B| = C(50, 1) \times C(50, 1) = 50^2 = 2500$.

2. $C(2n, 2)$ représente le nombre de manières de choisir deux nombres x et y entre 1 et $2n$. On distingue deux cas :
cas 1 : $x + y$ est paire $= P$
cas 2 : $x + y$ est impaire $= Im$
$\Rightarrow C(2n, 2) = |P| + |Im|$ (P et Im sont indépendants)
$= |P| + |Im|$
$= 2C(n, 2) + [C(n, 1)]^2$
$= 2C(n, 2) + n^2$.
Pour $n = 50$ on retrouve 1)

Exercice 5 :
Montrer que le produit de k entiers successifs est divisible par $k!$
(Indication : considérer le nombre de manières de choisir k objets parmi $n+k$ objets.)

Solution :
Considérons le nombre de manières de choisir k objets parmi $(n+k)$ objets. Ceci étant $C(n+k,k)$.
Or $C(n+k,k) = \frac{(n+k)!}{k!n!}$
$= \frac{(n+1)...(n+k)}{k!} \in IN$
On remarque que le numèrateur est le produit de k entiers successifs, d'où le résultat.

Exercice 6 :
De combien de manières deux entiers entre 1, $2, \ldots,\ n-1$ peuvent être choisis pour que leur somme soit supérieure à n ?

Solution :
Soient $A = \{1, 2, ..., n-1\}$, $B =$ choisir deux entiers x et y dans A.
$\Rightarrow B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ telque :
$B_1 = \{(x,y) \in A/x+y < n\}$, $B_2 = \{(x,y) \in A/x+y > n\}$ et $B_3 = \{(x,y) \in A/x+y = n\}$.
$|B_1|$?On a $|B| = C(2, n-1)$, $|B_3| = [\frac{n}{2}]$ et par symétrie $|B_1| = |B_2|$ donc $|B| = 2|B_1| + |B_3| \Rightarrow |B_1| = \frac{|B|-|B_3|}{2} = \frac{C(2,n-1)-[\frac{n}{2}]}{2}$.

5.2 Série 2

Exercise 1 :

1. De combien de manières deux entiers peuvent être choisis entre $1, \ldots, 100$ telque leur difference soit exactement égale á 7 ?
2. Refaire (1) avec la différence ≤ 7 .

Exercise 2 :

De combien de manières deux carrés adjacents peuvent être choisis á partir d'un 8×8 èchiquier ?

Exercise 3 :

1. Montrer que le nombre total de permutations de p boules rouges et 0, *ou* 1, *ou* $2, \ldots,$ *ou* q boules blanches est :

$\frac{p!}{p!} + \frac{(p+1)!}{p!1!} + \frac{(p+2)!}{p!2!} + \cdots + \frac{(p+q)!}{p!q!}$

2. Montrer que cette somme est égale á :
   $\frac{(p+q+1)!}{(p+q)!q!}$
3. Montrer que le nombre total de permutations de 0, *ou* 1, *ou* 2, ..., *ou* p boules rouges et 0, *ou* 1, *ou* 2, ..., *ou* q boules blanches est :
   $\frac{(p+q+2)!}{(p+1)!(q+1)!} - 2$

Exercise 4 :

1. De combien de maniéres deux entiers entre 1, 2, ..., 100 peuvent être choisis pour que leur somme soit paire ? impaire ?
2. Utiliser un argument combinatoire pour montrer que :
   $C(2n, 2) = 2C(n, 2) + n^2$

Exercise 5 :

Montrer que le produit de k entiers successifs est divisible par $k!$
(Indication : considérer le nombre de maniéres de choisir k objets parmi $n+k$ objets.)

Exercise 6 :

De combien de maniéres deux entiers entre
1, 2, ..., $n-1$ peuvent être choisis pour que leur somme soit égale á n ?

5.3 Série 3

Exercice 1 :

1. Soit R une relation binaire définie sur l'ensemble des entiers positifs telque $R = \{(a, b)/a - b$ est un entier positif impair$\}$. Vérifier si R est : réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive, une relation d'équivalence, une relation d'ordre partiel ?
2. Refaire 1) avec $R = \{(a, b)/a = b^2\}$.

Exercice 2 :

Soit R une relation transitive et réflexive définie sur A . Soit T une relation définie sur A telque $(a, b) \in T$ si et seulement si $(a, b) \in R$ et $(b, a) \in R$.
Montrer que T est une relation d'équivalence.

Exercice 3 :

1. Montrer que la fermeture transitive d'une relation symétrique est symétrique.
2. Est ce que la fermeture transitive d'une relation antisymétrique est toujours antisymétrique ?
3. Montrer que la fermeture transitive d'une relation compatible est une relation d'équivalence.

Exercice 4 :

Soit R une relation binaire de A dans B. L'inverse de R, noté R^{-1}, est une relation binaire de B dans A telque $R^{-1} = \{(b, a)/\ (a, b) \in R\}$.

1. Soient R_1 et R_2 deux relations binaires définies de A dans B. Vérifier si $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.
2. Soit R une relation binaire définie sur A. Est ce que R^{-1} est nécessairement réflexive (symétrique, transitive) si R est réflexive (symétrique, transitive) respectivement ?

Exercice 5 :

Soient S et T deux ensembles et f une fonction de S dans T. Soient R_1 une relation d'équivalence définie sur T et R_2 une relation binaire définie sur S telque $(x, y) \in R_2$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in R_1$.
Montrer que R_2 est une relation d'équivalence.

Exercice 6 :

Soit $(A, \leq)$ une relation d'ordre partiel. Soit $\leq_R$ une relation binaire définie sur A telque pour a et b dans A, $a \leq_R b$ si et seulement si $b \leq a$.

1. Montrer que $\leq_R$ est une relation d'ordre partiel.
2. Montrer que si $(A, \leq)$ est un treillis alors $(A, \leq_R)$ est aussi un treillis.

Exercice 7 :

Montrer que parmi m entiers consécutifs existe un entier qui est est divisible par m.

Exercice 8 :

1. Montrer que parmi $n + 1$ entiers choisis arbitrairement existe deux entiers telque leur diffèrence est divisible par n.
2. Montrer que parmi $n + 2$ entiers choisis arbitrairement existe deux entiers telque : soit leur diffèrence est divisible par $2n$, soit leur somme est divisible par $2n$.

5.4 Série 4

Exercice 1 :

Une balle de ping-pong est lâchée au sol d'une hauteur de 20 m. On suppose qu'elle rebondit pour atteindre toujours la moitié de la hauteur á partir de laquelle elle tombe.
(a) Soit a_r la hauteur atteinte au $r^{\text{ième}}$ rebond. déterminer la fonction numérique a.
(b) Soit b_r la hauteur perdue pendant le $r^{\text{ième}}$ rebond. Donner la fonction numérique b.
(c) Une deuxième balle est jetée d'une hauteur de 6 m sur le même sol en même temps que la première balle atteint son troisième rebond. Soit c_r la hauteur atteinte par la deuxième balle au cours de son $r^{\text{ième}}$ rebond. Exprimer c_r en fonction de a_r.

Exercice 2 :

On considère a la fonction numérique telque a_r est le reste de la division de r par 17.
Soit b la fonction numérique définie par :

$$b_r = 0si$$

r est divisible par $31 sinon$ *(a)* Soit $c_r = a_r + b_r$. Pour quelles valeurs de r, $c_r = 0$?, $c_r = 1$?
(b) Soit $d_r = a_r b_r$. Pour quelles valeurs de r, $d_r = 0$?, $d_r = 1$?

Exercice 3 :

Soient a et b deux fonctions numériques.
(a) Soit c = ab. Montrer que

$$\Delta c_r = a_{r+1}(\Delta b_r) + b_r(\Delta a_r)$$

(b) On pose $a_r = r + 1$, $b_r = \alpha^r \ \forall r \geq 0$. déterminer $\Delta($ ab$)$.
(c) Soit d = a/b le quotient de a et b défini par $d_r = \frac{a_r}{b_r}$. Montrer que

$$\Delta d_r = \frac{b_r(\Delta a_r) - a_r(\Delta b_r)}{b_r b_{r+1}}$$

(d) déterminer $\Delta($ ab$)$ pour les fonctions numériques a et b données dans *(b)*.

Exercice 4 :

déterminer les fonctions numériques qui correspondent aux fonctions génératrices suivantes :

1. $A(z) = \frac{z^5}{5-6z+z^2}$
2. $A(z) = \frac{1+z^2}{4-4z+z^2}$
3. $A(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$

Exercice 5 :

Calculer la somme suivante :

$$(n0\,(mk + (n1\,(mk - 1 + ... + (nk\,(m0, k \leq n \,\text{et}\, k \leq m$$

Exercice 6 :

Sachant que la relation de récurrence : $a_r + c_1 a_{r-1} + c_2 a_{r-1}$ est vraie pour $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 12$, déterminer a_r.

Exercice 7 :

Une particule se déplace horizontalement. La distance qu'elle atteint chaque seconde est égale à deux fois celle de la seconde précédente.
Soit a_r la position de la particule à la $r^{\text{ième}}$seconde. Determiner a_r, $(a_0 = 3, a_3 = 10)$.

Exercice 8 :

Résoudre l'équation différentielle $(E) := ra_r + ra_{r-1} - a_{r-1} = 2^r$, $a_0 = 273$ (Indication : on pose $b_r = ra_r$).